

Exercice 1 (4 points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

- 1) Si (x, y) est une solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation $5x - 6y = 6$ alors x est un multiple de 6.
- 2) L'équation $3x + 6y = 8$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- 3) Le reste de la division euclidienne de 3^{2014} par 5 est égal à 4.
- 4) Si $n \equiv 1[2]$ et $n \equiv 1[3]$ alors $n \equiv 1[6]$.

Exercice 2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (1 - \ln x)^2$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 2) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = -\frac{2}{x}(1 - \ln x)$.
b) Dresser le tableau de variations de f .
c) Tracer la courbe (C) .
- 3) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
a) Montrer que la fonction $F : x \mapsto x(5 + \ln^2 x - 4 \ln x)$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.
b) Calculer alors $\mathcal{A}$.
- 4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0, e]$.
a) Montrer que g est une bijection de $]0, e]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
b) Tracer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C') de la fonction g^{-1} réciproque de g .
c) Montrer que pour tout $x \in J$, $g^{-1}(x) = e^{1-\sqrt{x}}$.
- 5) On se propose de calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}} dx$.
a) Exploiter le graphique pour établir que $\mathcal{A} = \left(\int_0^1 e^{1-\sqrt{x}} dx \right) - 1$.
b) Montrer alors que $\mathcal{A} = eI - 1$ et donner la valeur de I .

Exercice 3 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- 1) a) Vérifier que $(1-5i)^2 = -24 - 10i$.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 + (3-i)z + 8+i = 0$.
- 2) Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -2 + 3i$, $z_B = -1 - 2i$ et $z_C = 4 - i$.
 - a) Placer dans le plan les points A, B et C.
 - b) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.
 - c) Déterminer l'affixe du point D pour lequel ABCD est un carré.
- 3) Soit (Γ) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1 - i| = \sqrt{13}$.
 - a) Déterminer l'ensemble (Γ) .
 - b) Que représente l'ensemble (Γ) pour le carré ABCD ? Construire (Γ) .

Exercice 4 (5 points)

Le tableau suivant donne (en milliards) le nombre d'abonnements au téléphone mobile, dans le monde.

Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Rang (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Effectif (y_i)	2,75	3,37	4,03	4,65	5,32	5,96	6,41	6,84

Source : International Telecommunication Union

- 1) a) Représenter dans un repère orthonormé, le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$.
On prendra pour unité graphique 1,5 cm.
b) Expliquer comment un ajustement affine est justifié.
- 2) a) Donner le coefficient de corrélation linéaire de $(x; y)$. Interpréter ce résultat.
b) Ecrire l'équation de la droite de régression de y en x (les coefficients seront arrondis au centième).
- 3) On suppose que cette tendance se maintient.
 - a) Estimer le nombre d'abonnements en 2014.
 - b) En quelle année le nombre d'abonnements atteindra 10 milliards pour la première fois ?