Section: Sciences de l'informatique *Session principale 2011*

Matière : Mathématiques

<u>Exercice 1</u> (4 points)

- ✓ **Contenu :** Nombres complexes - géométrie
- ✓ **Aptitudes visées :** Représenter un point connaissant son affixe, déterminer le module d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré à coefficients complexes, connaitre la nature d'un triangle.
- ✓ **Corrigé :**

1- a) $i^3 + i.i^2 - 2i + 4i = -i - i - 2i + 4i = 0$ donc i est une solution de (E) .

b) Comme i est une solution de (E) alors on peut écrire :

$z^3 + iz^2 - 2z + 4i = (z - i)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b - i) z^2 + (c - ib) z - ic$

Par identification ,on obtient $\begin{cases} b - i = i \\ c - ib = -2 \\ -ic = 4\square \end{cases}$ d'où $b = 2i$ et $c = -4$.

Par suite $z^3 + iz^2 - 2z + 4i = (z - i)(z^2 + 2iz - 4)$

2- a) $(z - i)(z^2 + 2iz - 4) = 0$ signifie $z = i$ ou $z^2 + 2iz - 4 = 0$.

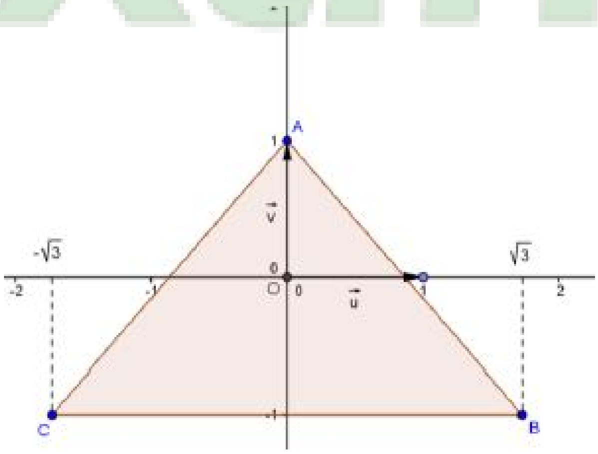
Or $z^2 + 2iz - 4 = 0$. a=1 , b= 2i=2b'signifie b'=i et c=-4

Donc $\Delta' = b'^2 - ac = 3$ d'où $z' = -i + \sqrt{3}$ et $z'' = -i - \sqrt{3}$

Conclusion : $S_C = \{ i ; -i + \sqrt{3} ; -i - \sqrt{3} \}$.

b) Question hors programme. (non notée)

3- a)



b) AB = $|z_B - z_A| = |-i + \sqrt{3} - i| = |\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{3 + 4} = \sqrt{7}.$

AC = $|z_C - z_A| = |-i - \sqrt{3} - i| = |-\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{3 + 4} = \sqrt{7}.$

Ainsi AB = AC donc ABC est un triangle isocèle de sommet principale A.

__Exercice 2__ **(5,5 points)**

- ✓ **Contenu :** Déterminant d'une matrice d'ordre3, inverse d'une matrice d'ordre3, système linéaire 3×3.
- ✓ **Aptitudes visées :** Modéliser une situation par un système linéaire, calculer le déterminant d'une matrice d'ordre3, reconnaitre l'inverse d'une matrice d'ordre3, résoudre un système linéaire 3×3.
- ✓ **Corrigé :**

1- $(S) : \begin{cases} x + 2y + 3z = 3200 \\ 4x + 2y + 5z = 4600 \\ 3x + y + 3z = 2700 \end{cases}$

2- a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 - 12 + 12 = 1 \neq 0$ donc A est inversible .

$A\times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -6 & 7 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ donc $A^{-1} = B$

b) Le système (S) équivaut à $AU = V$ avec $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 3200 \\ 4600 \\ 2700 \end{pmatrix}$

Par suite $AU = V$ signifie $U = A^{-1}V$ signifie $U = BV$ signifie

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -6 & 7 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3200 \\ 4600 \\ 2700 \end{pmatrix}$$

D'où $x = 200$ dinars ; $y = 900$ dinars et $z = 400$ dinars .

__Exercice 3__ **(4,5 points)**

- ✓ **Contenu :** Arithmétique.
- ✓ **Aptitudes visées :** Modéliser une situation par une équation du type $ax + by = c$, connaitre et utiliser les propriétés de la divisibilité dans Z, calculer le pgcd de deux entiers, reconnaitre que deux entiers sont premiers entre eux, résoudre dans Z^2, des équations du type $ax + by = c$.
- ✓ **Corrigé :**

1- a) Si (x , y) est solution de (E) alors $8x + 5y = 100$ signifie $8x=100-5y=5(20-y)$ ce qui donne que 5 divise 8x et comme $5 \wedge 8 = 1$ donc d'après le théorème de Gauss 5 divise x c'est-à-dire x est un multiple de 5.

b) D'après a) si (x , y) est solution de (E) alors x est multiple de 5 donc $x = 5k$, $k \in Z$ on remplace x dans l'équation(E)on obtient $8\times 5k + 5y = 100$ signifie $8k + y = 20$ d'où $y = 20 - 8k$, $k \in Z$.

Réciproquement, pour tout $k \in Z$ le couple $(x , y)= (5k , 20 - 8k)$ vérifier l'équation(E)

Conclusion $S_{Z\times Z} = \{(5k , 20 - 8k) ; k \in Z \}$.

2- soit x le nombre de lycéens et y le nombre de collégiens.
Les composantes possibles de ce groupe vérifier l'équation $(E) : 8x + 5y = 100$ donc d'après 1) $(x, y) = \{(5k, 20 - 8k), k \in \mathbb{Z}$.

Or $x \geq 0$ et $y \geq 0$ donc $5k > 0$ et $20 - 8k \geq 0$ ce qui donne $k > 0$ et $k \leq \frac{20}{8}$
Ainsi $k \in \{1, 2\}$.
Conclusion : $(x, y) \in \{(5, 12); (10, 4)\}$.

Exercice 4 (6 points)

- ✓ **Contenu :** Fonctions numériques ; limites, continuité, dérivabilité, variation, tangente à une courbe en un point, courbe, calcul d'aire.
- ✓ **Aptitudes visées :** Lire un tableau de variation d'une fonction, déterminer les limites d'une fonction, déterminer la dérivée d'une fonction , déterminer le sens de variation d'une fonction , reconnaitre une équation de la tangente à une courbe en un point, identifier les branches infinies d'une courbe, tracer une courbe, calculer l'aire d'une partie du plan.
- ✓ **Corrigé :**

1- a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

b) $A(1, 1) \in C$ signifie $f(1) = 1$
$T : y = x$ est la tangente à C au point $A(1, 1)$ donc $f'(1) = 1$.

2- a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} x(1 - \ln x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x - x\ln x) = 0$.

Ainsi f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$ et par suite C admet une demi tangente horizontale à dirigée à droite au point O .

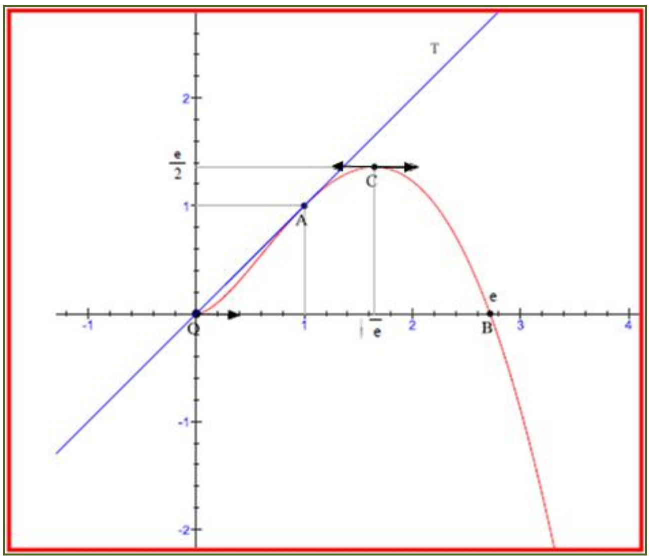
b) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty$.

donc C admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

c) $f(x) = 0$ signifie $x = 0$ ou $(1 - \ln x) = 0$ signifie $x = 0$ ou $\ln x = 1$ signifie $x = 0$ ou $x = e$.

Conclusion : $C \cap (Ox) = \{O(0, 0); B(e, 0)\}$.

d)



3- A = = .

A l'aide d'une intégration par partie , on pose : u(x) = 1 – lnx et v' (x) = x²

donc u' (x) = - $\frac{1}{x}$ et v (x) = $\frac{1}{3}$ x^3 , ce qui donne :

A = $\left[\frac{1}{3}x^3(1-\ln x)\right]_1^e + \frac{1}{3}\int_1^e x^2 \square x = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e = \frac{e^3-4}{9}$ (u.a) .