

MATHÉMATIQUES

Section : Mathématiques
Session principale : juin 2015

Exercice 1 (Thème : nombres complexes)

1) a) $\Delta = 4 - 16 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$; $z_1 = \frac{2 - 2\sqrt{3}i}{2} = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{2} = 1 + i\sqrt{3}$.

$$S_C = \{1 - i\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{3}\}.$$

b) $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2) voir figure.

3) On sait que $N \in \Gamma$ donc $|z_N| = 2$.

De plus $\arg(z_N) \equiv (\vec{u}, \widehat{\vec{ON}})[2\pi] \equiv (\vec{OM}, \widehat{\vec{ON}}) + (\vec{u}, \widehat{\vec{OM}})[2\pi] \equiv \theta + \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Il en résulte que $z_N = 2e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})}$.

4) a) L'expression complexe de r est $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_A) + z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - 2) + 2 = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2$.

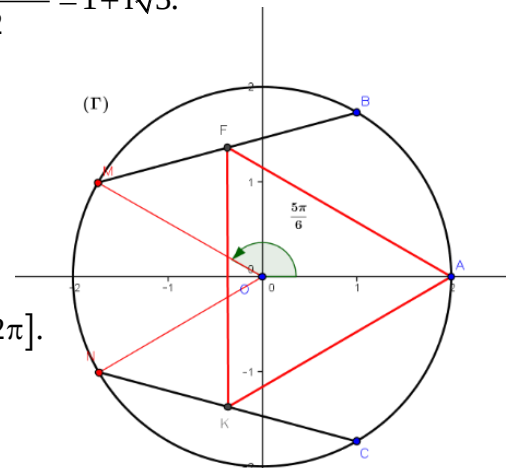
b) $z_F = \frac{z_B + z_M}{2} = e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_K = \frac{z_C + z_N}{2} = e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} + e^{-i\frac{\pi}{3}}$. En remplaçant z par z_F dans l'expression complexe de r , on obtient

$$\begin{aligned} z' &= e^{i\frac{\pi}{3}} \left(e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}} \right) - 2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2 = e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} + e^{i\frac{2\pi}{3}} - 2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2 \\ &= e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2 = e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} + e^{-i\frac{\pi}{3}} = z_K \text{ donc } r(F) = K. \end{aligned}$$

c) Puisque $r(F) = K$ donc $\begin{cases} AF = AK \\ (\vec{AF}, \widehat{\vec{AK}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$, il en résulte que le triangle AFK est équilatéral.

5) a) $AF^2 = \left| e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}} - 2 \right|^2 = \left(e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}} - 2 \right) \left(e^{-i\theta} + e^{-i\frac{\pi}{3}} - 2 \right) =$
 $6 + 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - 4\cos\frac{\pi}{3} - 4\cos\theta = 4 - (3\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)$
 $= 4 - 2\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right).$

b) AF^2 est maximale si et seulement si $\begin{cases} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \\ \theta \in]-\pi, \pi] \end{cases}$ d'où $\theta = \frac{5\pi}{6}$.



$$a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \varphi) ;$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{r} \\ \sin \varphi = \frac{b}{r} \end{cases}$$

Exercice 2 (Thèmes : similitude indirecte ; similitude indirecte ; antidéplacement)

1) Une mesure de l'angle de f est $(\overrightarrow{AB}, \widehat{\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et le rapport de f est $\frac{AC}{AB} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

2) a) Le rapport de g est $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) L'axe Δ de g est la droite qui porte la bissectrice intérieure de $\widehat{CAB}$

c) On pose $g(B) = B'$. On sait que $g \circ g = h_{\left(A, \frac{1}{3}\right)}$ et $g \circ g(C) = B'$ donc $h_{\left(A, \frac{1}{3}\right)}(C) = B' \Leftrightarrow \overrightarrow{AB'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$, or

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$, on en déduit que $D = B'$. Ainsi $g(B) = D$.

si g est une similitude indirecte de centre Ω et de rapport k ; alors :
 $g \circ g$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport k^2

Puisque $g(B) = D$ donc $\frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\widehat{ABD}\right)$ d'où $\widehat{ABD} = \frac{\pi}{6}$, il en résulte que $[BD)$ est la bissectrice intérieure de $\widehat{ABC}$.

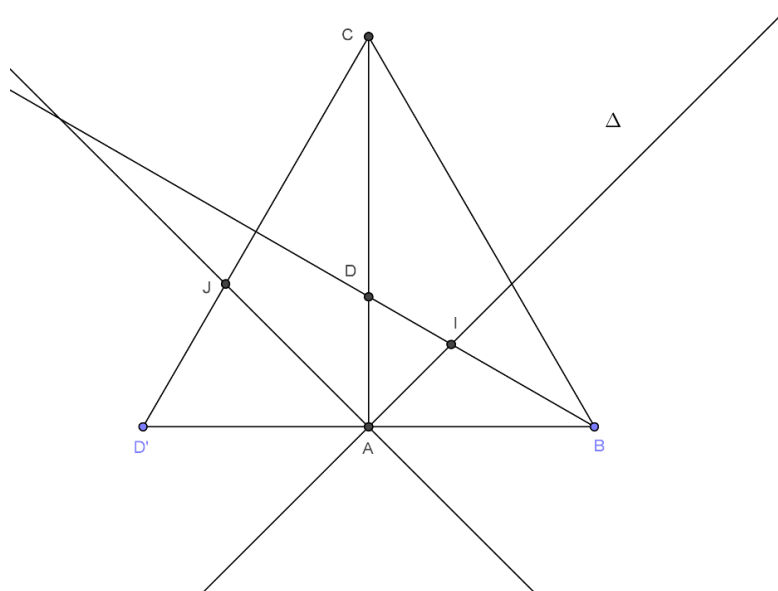
3) a) $f \circ g$ est la composée d'une similitude directe de rapport $\sqrt{3}$ et d'une similitude indirecte de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$ donc $f \circ g$ est un antidéplacement

la composée d'une similitude directe de rapport k et d'une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{k}$ est soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie glissante.

or $f \circ g(A) = A$ et $f \circ g(C) = C$ donc $f \circ g$ est une symétrie orthogonale d'axe (AC) .

b) On a $f \circ g(B) = D'$ donc $S_{(AC)}(B) = D'$ d'où $(AC) \perp (BD')$ et $(AC) \perp (BA)$ donc B, A et D' sont alignés or $AB = AD'$ donc A est le milieu de $[BD]$ et par suite $S_A(B) = D'$.

4) $\{I\} = (BD) \cap \Delta$ donc $f(I) \in f((BD)) \cap f(\Delta)$, or $f(\Delta) = S_{(AC)} \circ g^{-1}(\Delta) = S_{(AC)}(\Delta) = (AJ)$. d'où $f(I) \in (CD') \cap (AJ) = \{J\}$.



Exercice 3 (Thème : arithmétique)

- 1) a) $47 \times (-9) + 53 \times 8 = 1$ donc $(-9, 8)$ est solution de (E).
b) $47x + 53y = 47 \times (-9) + 53 \times 8 \Leftrightarrow 47(x + 9) = 53(8 - y)$ donc 47 divise $53(8 - y)$ et $47 \wedge 53 = 1$ donc 47 divise $(8 - y)$ d'où $y = 8 - 47k, k \in \mathbb{Z}$ par suite $x = 53k - 9, k \in \mathbb{Z}$.
Ainsi $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(53k - 9, 8 - 47k), k \in \mathbb{Z}\}$.
c) soit x un inverse de 47 modulo 53, alors $47x \equiv 1 \pmod{53} \Leftrightarrow$ il existe un entier y tel que $47x = 1 + 53y \Leftrightarrow 47x - 53y = 1 \Leftrightarrow (x, -y)$ solution de (E) donc $x = 53k - 9, k \in \mathbb{Z}$
d) $0 < x = 53k - 9 < 53 \Leftrightarrow \frac{9}{53} < k < \frac{62}{53}, k \in \mathbb{Z}$ donc $k = 1$ d'où $x = 44$.
- 2) a) D'après Fermat $45^{52} \equiv 1 \pmod{53}$
b) $45^{106} = (45^{52})^2 \times 45^2 \equiv 45^2 \pmod{53} \equiv 11 \pmod{53}$.
- 3) a) N est la somme de 106 termes d'une suite géométrique de raison 45
donc $N = \frac{1 - 45^{106}}{1 - 45} \Leftrightarrow 44N = 45^{106} - 1 \equiv 10 \pmod{53}$
b) $44N \equiv 10 \pmod{53}$ donc $N \equiv 470 \pmod{53} \equiv 46 \pmod{53}$.

Exercice 4 (Thèmes : variation d'une fonction, bijection, calcul intégral, notion d'aire)

I.

- 1) a) La fonction f est dérivable sur $[0, \pi]$ et $f'(x) = (\cos x)e^{\sin x}$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
f'(x)	+	$\circ$	-
f	1	e	1

- b) Pour tout $x \in [0, \pi]$, $\pi - x \in [0, \pi]$ et $f(\pi - x) = e^{\sin(\pi - x)} = e^{\sin x} = f(x)$.
c) (T) : $y = f'(0)x + f(0) = x + 1$.
- 2) a) La fonction g est continue et strictement croissante sur $\left]0, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right]$ donc
$$g\left(\left]0, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right]\right) = \left]0, g\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right]$$
 par suite $g(x) > 0$ sur $\left]0, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right]$.

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left] \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right[$ donc elle réalise une bijection de $\left] \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right[$ sur $g\left(\left] \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right[\right) = \left] -1, g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \right[$, $0 \in \left] -1, g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \right[$ donc il existe un unique $\alpha \in \left] \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Ainsi l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, 1[$.

b)

x	0	α	1
$g(x)$	+	$\bigcirc$	-

3) a) La fonction h est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $h'(x) = (\cos x)e^{\sin x} - 1 = g(\sin x)$.

b) La fonction $x \mapsto \sin x$ est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$,
or $\alpha \in [0, 1]$ donc il existe un unique $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin \beta = \alpha$.

la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$

c) La fonction $x \mapsto \sin x$ est continue et strictement croissante sur chacun des intervalles $[0, \beta]$ et $[\beta, \frac{\pi}{2}]$ donc $\sin([0, \beta]) = [\sin 0, \sin \beta] = [0, \alpha]$ et $\sin\left(\left[\beta, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [\alpha, 1]$.

d)

x	0	β	$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$	+	$\bigcirc$	-
h	0	$h(\beta)$	$h\left(\frac{\pi}{2}\right)$

e) $h([0, \beta]) = [0, h(\beta)]$ et $h\left(\left[\beta, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[h\left(\frac{\pi}{2}\right), h(\beta)\right]$ et $h\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ donc $h(x) \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par suite $f(x) \geq x + 1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc (C_f) est en dessus de (T) .

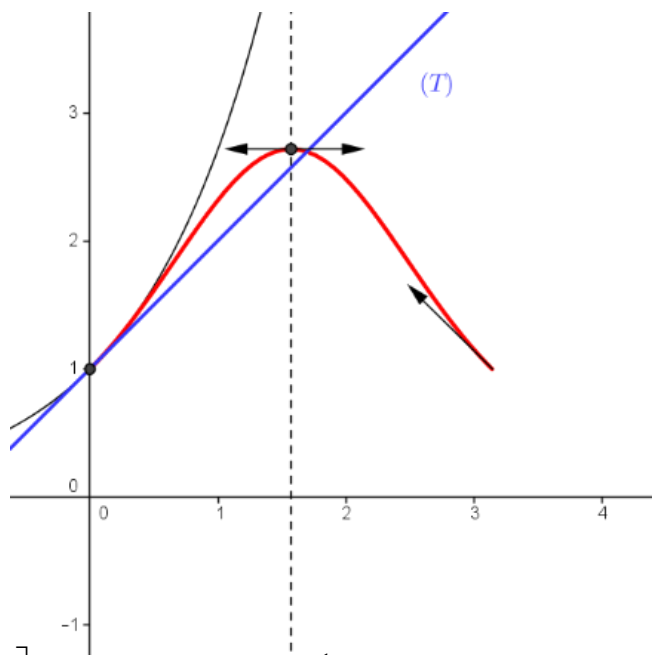
II.

1) a) pour tout $x \geq 0$, $\cos t \leq 1$, $t \in [0, x]$ et $t \mapsto \cos t$ est continue sur $[0, x]$ donc $\int_0^x \cos t dt \leq x$ donc $\sin x \leq x$.

b) La fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$ donc

$$e^{\sin x} \leq e^x \Leftrightarrow f(x) \leq e^x \text{ pour tout } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

c)



2) a) on sait que $f(x) \leq e^x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\int_0^1 f(x) dx \leq \left[e^x\right]_0^1 = e - 1$

on sait que $\sin x \leq 1$ donc $f(x) \leq e$ donc $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq e \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

b) $A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

$$\left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq e - 1 + e \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \text{ donc } \frac{\pi^2}{4} + \pi \leq A \leq e\pi - 2$$