

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◆◆◆◆ <b>EXAMEN DU BACCALAUREAT</b> <b>SESSION 2015</b>	Épreuve : <b>MATHEMATIQUES</b>
	Durée : 3 H
	Coefficient : 3
Section : <b>Sciences expérimentales</b>	<b>Session de contrôle</b>

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

**Exercice 1 : (5 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère la sphère (S) d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 23 = 0$ .

- 1/ Justifier que (S) est de centre le point  $I(1, -1, 0)$  et de rayon 5.
- 2/ Soit le point  $J(-1, 1, 1)$  et soit (P) l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  tels que  $\vec{JI} \cdot \vec{JM} = 0$ .
  - a) Justifier que (P) est le plan d'équation  $2x - 2y - z + 5 = 0$ .
  - b) Montrer que l'intersection de (S) et (P) est le cercle (C) de centre J et de rayon 4.
- 3/ Soit le point  $A(-5, 5, 3)$  et (S') la sphère de centre A et de rayon  $2\sqrt{13}$ .
  - a) Montrer que A appartient à la droite (IJ).
  - b) Montrer que  $AJ = 6$ .
- 4/ Soit M un point du cercle (C).
  - a) Justifier que le triangle AJM est rectangle en J.
  - b) En déduire que  $AM = 2\sqrt{13}$ .
  - c) Déterminer alors l'intersection de la sphère (S') et du plan (P).

**Exercice 2 : (5 points)**

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^2 - 4e^{i\frac{\pi}{3}}z + e^{2i\frac{\pi}{3}} = 0$ .

- 1/ a) Montrer que le discriminant  $\Delta$  de l'équation (E) est égal à  $\left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$ .
- b) Résoudre l'équation (E). On donnera les solutions sous forme exponentielle.

2/ Dans l'annexe ci-jointe,  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  est un repère orthonormé direct du plan et  $\mathcal{C}$  est le cercle de centre le point I d'affixe  $z_I = 1 + i\sqrt{3}$  et de rayon  $\sqrt{3}$ .

a) Écrire  $z_I$  sous forme exponentielle.

b) La droite (OI) coupe le cercle  $\mathcal{C}$  en deux points A et B tels que  $OA < OB$ .

Placer A et B, puis justifier que  $OA = 2 - \sqrt{3}$  et  $OB = 2 + \sqrt{3}$ .

c) En déduire que les affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$  des points A et B sont les solutions de l'équation (E).

### **Exercice 3 : (6 points)**

1/ Soit la fonction  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = x - \ln x$ .

a) Étudier le sens de variation de  $g$ .

b) En déduire que pour tout réel  $x$  de  $]0, +\infty[$ ,  $g(x) > 0$ .

2/ Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = 2x - (\ln x)^2$ .

a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

b) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que pour tout réel  $x$  de  $]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ .

c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On désigne par  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  et par  $\Delta$  la droite d'équation  $y = 2x$ .

a) Vérifier que  $\Delta$  est la tangente à  $C_f$  en son point d'abscisse 1.

b) Montrer que  $C_f$  admet une direction asymptotique qui est celle de la droite  $\Delta$ .

c) Étudier la position relative de  $C_f$  et  $\Delta$ .

4/ a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  et que  $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$ .

b) Tracer la courbe  $C_f$ .

c) Soit  $\mathcal{A}$  l'aire de la partie du plan limitée par la droite  $\Delta$ , la courbe  $C_f$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .

En utilisant une intégration par parties, montrer que  $\mathcal{A} = e - 2$ .

**Exercice 4 : (4 points)**

1/ Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite géométrique de premier terme  $u_0 = \frac{1}{3}$  et de raison  $\frac{1}{3}$ .

a) Calculer  $u_1$ .

b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

c) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .

Montrer que  $S_n = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right)$ .

2/ En étudiant les variations de la fonction  $h : x \mapsto e^x - 1 - x$ , montrer que

$$1 + x \leq e^x, \text{ pour tout réel } x.$$

3/ Soit  $(v_n)$  la suite définie, pour tout entier naturel  $n$ , par

$$v_n = (1 + u_0)(1 + u_1) \times \dots \times (1 + u_n).$$

a) Calculer  $v_0$  et  $v_1$ .

b) Montrer que la suite  $(v_n)$  est croissante.

c) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n \leq e^{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right)}$ .

d) Montrer que la suite  $(v_n)$  est convergente.

e) Soit  $\ell$  la limite de  $(v_n)$ .

Montrer que  $1 < \ell \leq \sqrt{e}$ .

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....  
Nom et prénom : .....  
Date et lieu de naissance : .....

Signatures des  
surveillants  
.....  
.....



Epreuve : MATHEMATIQUES - Section : Sciences expérimentales

**Annexe (à rendre avec la copie)**

