

MATHS

Section : Mathématiques

1^{ère} Session

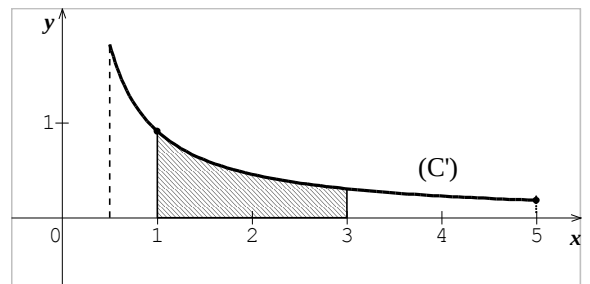
Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[\frac{1}{2}, 5]$ telle que sa courbe représentative (C) passe par les points $A(1,0)$ et $B(3, 1)$. Dans la figure ci-contre, on a représenté la courbe (C') de la dérivée f' de la fonction f .

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

- 1) (C) admet une tangente de coefficient directeur -1.
- 2) L'aire de la partie hachurée est égale à 1.
- 3) (C) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.
- 4) Pour tous a et b de $[1,3]$, $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$.



Contenu

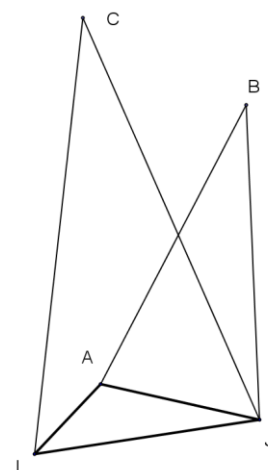
- Tangente à une courbe
- Notion d'aires
- Inégalités des accroissements finis

Solutions

1. Faux., car Pour $x \in [\frac{1}{2}, 5]$, $f' x > 0$. Par suite $f' x \neq -1$ pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 5]$.
2. Vrai. En effet : La fonction f' est continue et positive sur $[1,3]$ donc l'aire de la partie hachurée est égale à :
$$\int_1^3 f' x \, dx = f 3 - f 1 = 1 - 0 = 1.$$
3. Vrai. En effet : La fonction f' est continue sur $[\frac{1}{2}, 5]$ et $\frac{1}{2} \in [\frac{1}{2}, 5]$ donc il existe $c \in [\frac{1}{2}, 5]$ tel que $f' c = \frac{1}{2}$.
4. Vrai. En effet : La fonction f est dérivable sur $[1,3]$ et pour $x \in [1,3]$, $|f' x| \leq 1$.
D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous a et b de $[1,3]$, $|f b - f a| \leq |b - a|$.

Exercice 2

Dans le plan orienté, AIJ est un triangle quelconque, BAJ et CIJ sont deux triangles isocèles respectivement en B et C tels que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BJ}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ et $(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CJ}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.



On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ et par r_B et r_C les rotations de même angle $\frac{\pi}{6}$ et de centres respectifs B et C .

- 1) a) Déterminer $r_C(I)$.
b) Montrer que $r_B \circ t(I) = J$.
c) En déduire que $r_B \circ t = r_C$.

- 2) Soit $K = t(C)$.

Montrer que $BC = BK$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BK}) \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$.

- 3) Soit D le point du plan tel que le triangle DIA est isocèle en D et $(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DA}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

- a) Soit O le milieu de $[AC]$.

Montrer que l'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKC .

- b) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Contenu

- Composée rotation et translation
- Configuration de base (triangle isocèle, parallélogramme)

Aptitudes visées :

- Reconnaître la composée d'une rotation et d'une translation
- Exploiter une isométrie pour déterminer la nature d'un quadrilatère.

Solutions

1. a) Le triangle CIJ est isocèle en C et $\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CJ} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$, par suite $CI = CJ$ et $\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CJ} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

On en déduit que $r_C(I) = J$.

- b) Le triangle BAJ est isocèle en B et $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BJ} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$, par suite $BA = BJ$ et $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BJ} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

On en déduit que $r_B(A) = J$. $\begin{cases} t(I) = A \\ r_B(A) = J \end{cases}$ donc $r_B \circ t(I) = J$.

- c) $r_B \circ t$ est la composée d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et d'une translation donc c'est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Or $r_B \circ t \mid = J$, $CI = CJ$ et $\widehat{CI, CJ} \equiv \frac{\pi}{6} \quad 2\pi$. Il en résulte que C est le centre de $r_B \circ t$.

On en déduit que $r_B \circ t = r_C$.

2. Puisque $K = t \mid C$ donc $r_B \circ t \mid C = r_B \mid K$, or $r_B \circ t \mid C = r_C \mid C = C$. Il en résulte que $r_B \mid K = C$ ou encore $BC = BK$ et $\widehat{BC, BK} \equiv -\frac{\pi}{6} \quad 2\pi$.

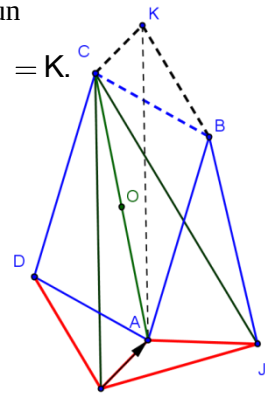
3. a) On sait que $K = t \mid C$ donc $\overline{CK} = \overline{IA}$ et les points I, A et C ne sont pas alignés donc IAKC est un parallélogramme. Comme O est le milieu de $[IC]$ donc O est le milieu de $[IK]$. Il en résulte que $S_O \mid = K$.
d'autre part Le point O est le milieu de $[AC]$ donc $S_O \mid A = C$.

Le triangle DIA est isocèle de base $[IA]$ tel que $\widehat{DI, DA} \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$.

$S_O \mid = K, S_O \mid A = C, \widehat{BK, BC} \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$ et le triangle BKC est isocèle de base $[KC]$.

On en déduit que l'image du triangle IAD par S_O est le triangle BKC.

- b) L'image du triangle IAD par S_O est le triangle BKC, $S_O \mid = K$ et $S_O \mid A = C$ donc $S_O \mid D = B$ ou encore O est le milieu de $[BD]$ de plus O est le milieu de $[AC]$ et les points A, B et C ne sont pas alignés. On en déduit que ABCD est un parallélogramme.



Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A le point de coordonnées $(3, 2)$.

Soit N un point de l'axe $(O, \vec{u})$ et P le point de l'axe $(O, \vec{v})$ tel que ANP est un triangle rectangle en A.

- 1) a) Soit les points E(3, 0) et F(0, 2).
Montrer qu'il existe une unique similitude directe S de centre A qui transforme E en F.
Donner son rapport et son angle.
- b) Déterminer l'image de l'axe $(O, \vec{u})$ par S.
- c) En déduire que $S(N) = P$.
- d) Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z' tel que $M' = S(M)$.

Montrer que $z' = -\frac{3}{2}i z + \frac{13}{2}i$.

- 2) a) On note x l'abscisse du point N et y l'ordonnée du point P.
Montrer que $3x + 2y = 13$.
- b) Déterminer les points N et P dont les coordonnées sont des entiers.

Contenu

- Similitude directe (image d'une configuration de base par une similitude directe, expression complexe d'une similitude directe)
- Arithmétique

Aptitudes visées :

- Reconnaître une similitude directe.
- Reconnaître l'image d'une droite par une similitude directe.
- Identifier l'image d'un point par une similitude directe.
- Résoudre un problème d'arithmétique.

Solutions

1. a) $A \neq E$ et $A \neq F$ donc il existe une unique similitude directe S de centre A qui envoie E en F , son rapport est $k = \frac{AF}{AE} = \frac{3}{2}$ et son angle a pour mesure $\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

b) $SE = F$ et $E \in O, \vec{u}$ donc $S(O, \vec{u})$ est la droite passant par F et perpendiculaire à $O, \vec{u}$.

Il en résulte que $S(O, \vec{u}) = O, \vec{v}$.

c) $SA \perp AN$ est la droite passant par A et perpendiculaire à AN , il en résulte que $SA \perp AN = AP$.

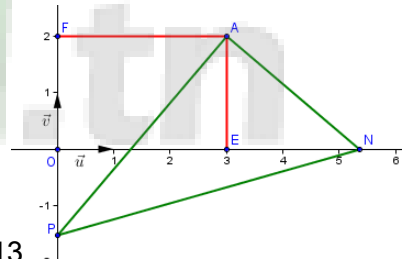
$N \in AN \cap O, \vec{u}$ donc $SN \in SA \perp AN \cap S(O, \vec{u}) = AP \cap O, \vec{v} = P$. D'où $SN = P$.

d) S est la similitude directe de centre A d'affixe $z_A = 3 + 2i$, de rapport $\frac{3}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z' , image de M par S . L'expression complexe de S est de la

forme $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ avec $a = \frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{2}i$ et $\frac{b}{1 + \frac{3}{2}i} = 3 + 2i$ donc $b = \frac{13}{2}i$.

On en déduit que $z' = -\frac{3}{2}iz + \frac{13}{2}i$.



2. a) L'affixe de N est $z_N = x$ et l'affixe de P est $z_P = iy$.

$$SN = P \Leftrightarrow iy = -\frac{3}{2}ix + \frac{13}{2}i = \left(-\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}\right)i \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2} \Leftrightarrow 3x + 2y = 13.$$

b) $N(x, 0)$ et $P(0, y)$. x et y sont des entiers si et seulement si (x, y) est solution de l'équation

$$3x + 2y = 13 \text{ dans } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Réolvons alors dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $E : 3x + 2y = 13$.

$$1, 5 \text{ est solution de } E \text{ donc } 3x + 2y = 13 \Leftrightarrow 3x + 2y = 3 \times 1 + 2 \times 5 \Leftrightarrow 3x - 1 = 2(-y + 5) \quad (*)$$

3 divise $2(-y + 5)$ et $3 \wedge 2 = 1$ donc d'après Gauss 3 divise $-y + 5$ par suite $-y + 5 = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

ou encore $y = -3k + 5$. En remplaçant y par sa valeur dans $(*)$, on obtient $x = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Réciproquement } 3(2k + 1) + 2(-3k + 5) = 3 + 10 = 13.$$

On en déduit que $N(2k + 1, 0)$, $P(0, -3k + 5)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4

Un laboratoire de sciences physiques dispose d'un ensemble d'oscilloscopes de même modèle. La durée de vie, en nombre d'années, d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,125.

Dans tout l'exercice on donnera les résultats à 10^{-3} près par défaut.

1) a) Montrer que $p(X > 10) = 0,286$.

b) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

2) Le responsable du laboratoire veut commander n oscilloscopes ($n \geq 2$).

On suppose que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres.

On note p_1 la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

a) Exprimer p_1 en fonction de n .

b) Combien d'oscilloscopes, au minimum, devrait commander le responsable pour que p_1 soit supérieure à 0.999 ?

Contenu

- Loi de probabilité continue (loi exponentielle)
- Loi binomiale

Aptitudes visées :

- Calculer la probabilité d'un événement pour une loi exponentielle.
- Reconnaître une loi binomiale
- Calculer la probabilité d'un événement pour une loi binomiale.

Solutions

1. a) $p(X > 10) = e^{-0,125 \times 10} = e^{-1,25} = 0,286$.

b) L'évènement « l'oscilloscope a une durée de vie inférieure à 6 mois » se traduit par $0 \leq X \leq 0,5$.

$$p(0 \leq X \leq 0,5) = 1 - e^{-\frac{0,125}{2}} = 1 - e^{-0,0625} = 0,06.$$

2. On considère la variable aléatoire Y qui prend pour valeurs, le nombre d'oscilloscopes qui ont une durée de vie supérieure à 10 ans. Y suit une loi binomiale de paramètres $n, p(X > 10) = 0.286$.

La loi de Y est donnée par $P(Y = k) = C_n^k \cdot 0,286^k \cdot 0,714^{n-k}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

a) $p_1 = p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0,714^n$.

$$b) p_1 \geq 0,999 \Leftrightarrow 1 - 0,714^n \geq 0,999 \Leftrightarrow 0,714^n \leq 0,001 \Leftrightarrow n \ln 0,714 \leq \ln 0,001$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,001}{\ln 0,714} = 20.505. \text{ Soit } n = 21.$$

Exercice 5

I] On considère la fonction f_2 définie sur $]0, +\infty[$ par $f_2(x) = x^2 - \ln x$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Dresser le tableau de variation de f_2 .

2) On a tracé ci-dessous, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (L) de la fonction $\ln$ et la courbe (C) d'équation $y = x^2$.

a) Soit $x > 0$. On considère les points M et M_2 de même abscisse x et appartenant respectivement à (L) et (C). Vérifier que $MM_2 = f_2(x)$.

b) Construire alors les points de la courbe (Γ) d'abscisses respectives $2, \frac{1}{e}$ et $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

c) Tracer la courbe (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II] 1) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_k définie sur $]0, +\infty[$ par $f_k(x) = x^k - \ln x$.

a) Déterminer f'_k la fonction dérivée de f_k .

b) Montrer que f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à $\frac{1 + \ln k}{k}$.

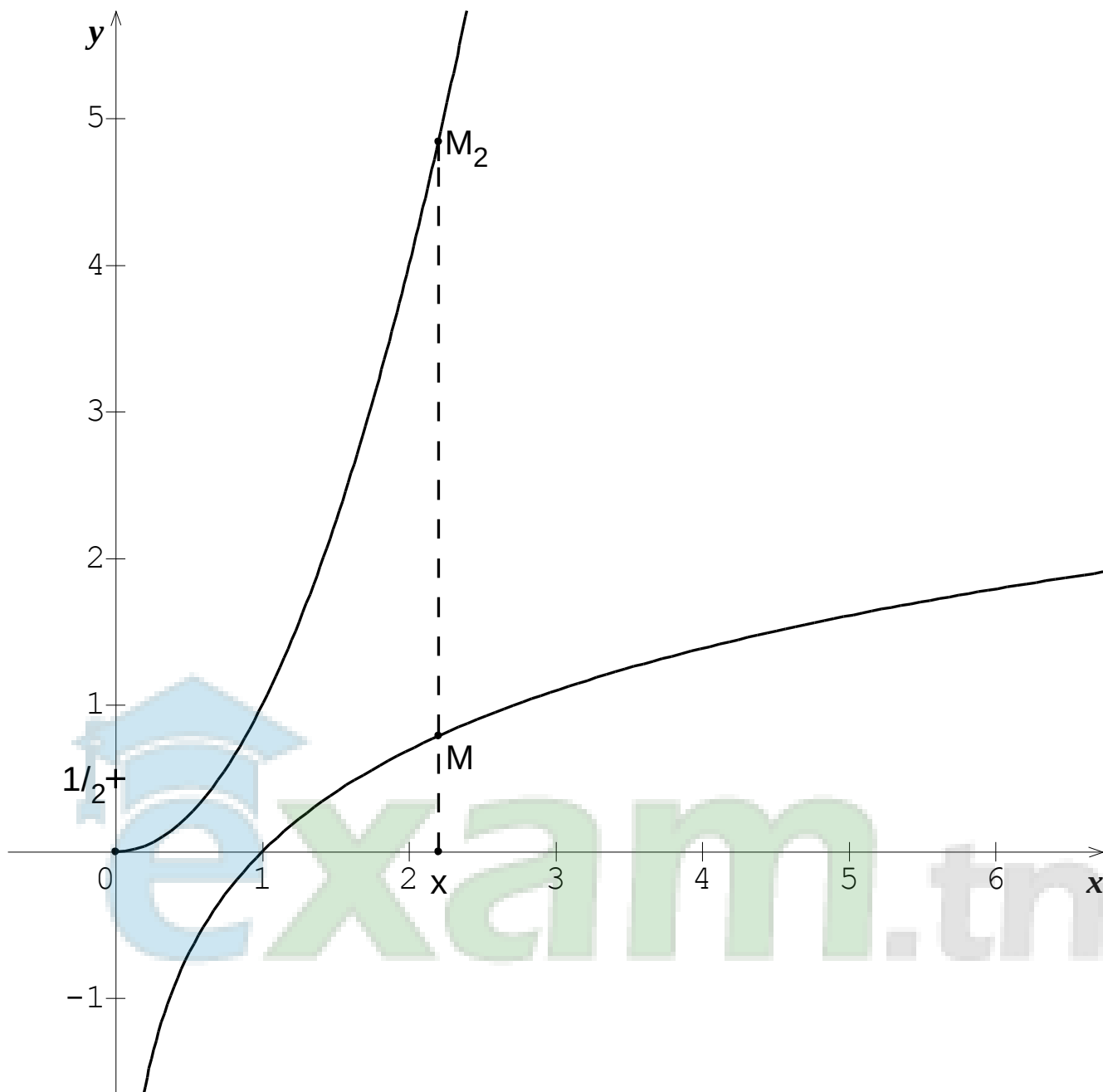
c) Pour tout réel $x > 0$, on considère les points $M_k(x, x^k)$ et $M(x, \ln x)$.
Déterminer la valeur minimale de la distance MM_k .

2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$.

a) Vérifier que $\ln u_k = -\frac{\ln k}{k}$ et en déduire la limite de (u_k) .

b) Soit $A(1, 0)$ et A_k le point de coordonnées $(u_k, f_k(u_k))$.

Calculer la limite de la distance AA_k lorsque k tend vers $+\infty$.



- *Fonction $\ln$: continuité, dérivabilité, branches infinies .*
- *Notion d'extremum*
- *Suite réelle.*

Aptitudes visées :

- *Calculer la limite d'une fonction.*
- *Interpréter graphiquement un résultat.*
- *Etudier les variations d'une fonction.*
- *Reconnaître un minimum d'une fonction.*
- *Calculer la limite d'une suite réelle.*

Solutions

I.

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{\ln x}{x} = +\infty$ donc Γ admet une branche parabolique de direction celle de $O, \vec{j}$.

c) La fonction f_2 est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f_2'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$.

Le signe de $f_2'(x)$ est celui de $2x^2 - 1$. $\begin{cases} 2x^2 - 1 \\ x \in]0, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

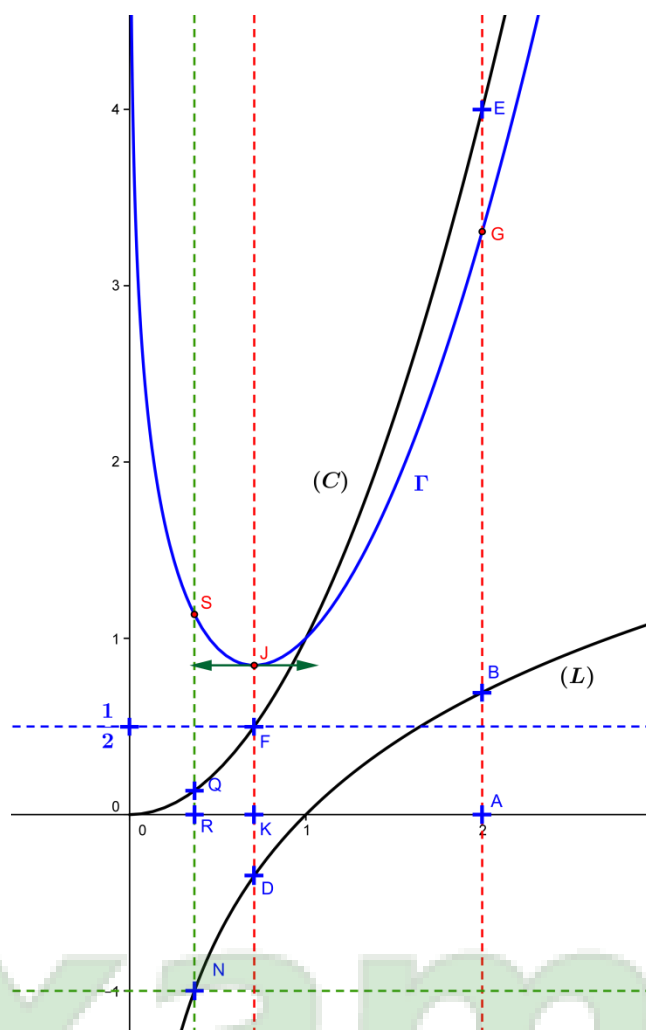
x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f_2'(x)$	-	0	+
f_2	$+\infty$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2$	$+\infty$

2. a) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $MM_2 = |x^2 - \ln x| = |f_2(x)| = f_2(x)$ car f_2 admet un minimum global strictement positif sur $]0, +\infty[$ donc $f_2(x) > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

b) *) La droite passant par le point A de l'axe des abscisses d'abscisse 2 et parallèle à l'axe des ordonnées coupe L en B et C en E. Ainsi le point de Γ d'abscisse 2 est le point G de AE tel que $EG = AB$.

**) Du point de l'axe des ordonnées d'ordonnée -1, on mène la parallèle à l'axe des abscisses. Elle coupe L en N. Du point N on mène la parallèle à l'axe des ordonnées. Elle coupe C en Q et l'axe des abscisses en R, le point de Γ d'abscisse $\frac{1}{e}$ est alors le point S du segment RQ tel que $RS = NQ$.

***) Du point de l'axe des ordonnées d'ordonnée $\frac{1}{2}$ on mène la parallèle à l'axe des abscisses. Elle coupe C en F et de F on mène la parallèle à l'axe des ordonnées elle coupe L en H et l'axe des abscisses en K, le point de Γ d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est alors le point J de la demi-droite KF tel que $KJ = HF$.



II.

1. a) La fonction f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x \in]0, +\infty[$, $f'_k(x) = kx^{k-1} - \frac{1}{x} = \frac{kx^k - 1}{x}$.

b) $f'_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ de plus $f'_k(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ et $f'_k(x) > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$. Il en résulte que f'_k s'annule en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ en changeant de signe, d'où f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à

$$f_k\left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right) = \left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right)^k - \ln \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \ln k = \frac{1 + \ln k}{k}.$$

c) $MM_k = |x^k - \ln x| = |f_k(x)| = f_k(x)$ car le minimum de f_k est $\frac{1 + \ln k}{k} > 0$ pour $k \geq 2$. Donc la valeur minimale de MM_k est la valeur minimale de f_k sur $]0, +\infty[$ qui est égale à $f_k\left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right) = \frac{1 + \ln k}{k}$.

2. a) Pour tout $k \geq 2$, $\ln u_k = \ln \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} \ln \frac{1}{k} = \frac{-\ln k}{k}$. $\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln u_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln k}{k} = 0$ d'où $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 1$.

b) $AA_k = \sqrt{1 - u_k^2 + f_k(u_k)^2}$. Or $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 1$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(u_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln k}{k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} + \frac{\ln k}{k} = 0$.

On en déduit que $\lim_{k \rightarrow +\infty} AA_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - u_k^2 + f_k(u_k)^2} = 0$.