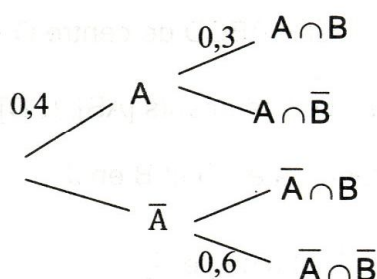


|                                                                        |                                                              |                            |                        |
|------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|----------------------------|------------------------|
| <b>REPUBLIQUE TUNISIENNE</b><br>◇◇◇<br><b>MINISTERE DE L'EDUCATION</b> | <b>EXAMEN DU BACCALAUREAT</b><br><b>SESSION DE JUIN 2012</b> |                            |                        |
|                                                                        | <b>Epreuve : MATHEMATIQUES</b>                               | <b>Durée : 4 h</b>         | <b>Coefficient : 4</b> |
| <b>SECTION : mathématiques</b>                                         |                                                              | <b>Session de contrôle</b> |                        |

Le sujet comporte 3 pages.

### Exercice 1 (3 points)

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre de probabilité suivant :



Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes en justifiant la réponse :

- 1)  $p(\bar{A}) = 0,6$ .
- 2) La probabilité de  $\bar{B}$  sachant A est égale à 0,7.
- 3)  $p(B) = 0,7$ .
- 4)  $p(A \cup B) = 0,64$ .

### Exercice 2 (4 points)

Soit  $a$  un réel strictement positif.

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - (1+i)a z + i a^2 = 0$ .
- 2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On désigne par A et B les points d'abscisses respectives  $a$  et  $ia$ .

- a) Quelle est la nature du triangle OAB ?
- b) Déterminer l'abscisse du point C tel que OACB soit un carré.
- 3) Soient P et Q les points du plan tels que les triangles OAP et AQC sont équilatéraux de sens direct.
  - a) Montrer que l'abscisse de P est égale à  $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})a$ .
  - b) Calculer l'abscisse du point Q.
  - c) Montrer que les points B, P et Q sont alignés.

### Exercice 3 (3 points)

1) On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $7x + 18y = 9$ .

a) Montrer que le couple  $(9, -3)$  est une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E).

2) Résoudre alors dans  $\mathbb{Z}$ , le système 
$$\begin{cases} n \equiv 6 \pmod{7} \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$$

### Exercice 4 (5 points)

On considère dans le plan orienté un carré ABCD de centre O tel que  $(\widehat{AB, AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

On note I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [AD].

Soit S la similitude directe qui transforme A en O et B en J.

1) Montrer que S est de rapport  $\frac{1}{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

2) a) Déterminer les images des droites (BC) et (AC) par S.

b) En déduire  $S(C)$ .

3) a) Déterminer l'image du carré ABCD par S.

b) En déduire que  $S(D) = K$ .

c) Soit  $\Omega$  le centre de S. Montrer que  $\Omega$  est le barycentre des points pondérés  $(C, 1)$  et  $(K, 4)$ .

d) Soit E le milieu du segment [OD]. Montrer que  $S \circ S(A) = E$ .

e) Construire  $\Omega$ .

4) Montrer que les droites (AE), (CK) et (DI) sont concourantes.

### Exercice 5 (5 points)

1) Soit g la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = 1 + x - x \ln x$ .

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  dans  $]0, +\infty[$ .

Vérifier que  $3,5 < x_0 < 3,6$ .

c) En déduire le signe de g.

2) Soit f la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ .

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- a) Calculer  $f'(x)$  et vérifier que  $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$ .
- b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- c) Vérifier que  $f(\sqrt{x_0}) = \frac{1}{2x_0}$ .
- d) Tracer la courbe (C). (On prendra  $x_0 \approx 3,6$ )
- 3) Soit  $(a_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $a_n = \int_1^n \frac{1}{t} f(t) dt$ .
- a) Montrer que la suite  $(a_n)$  est croissante.
- b) Montrer que pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0,1[$ ,  $\ln x \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \ln x$ .
- c) En déduire que  $\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1 + \ln n}{n} \right) \leq a_n \leq 1 - \frac{1 + \ln n}{n}$ .
- d) Montrer alors que la suite  $(a_n)$  est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle  $[\frac{1}{2}, 1]$ .

