

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ***** EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Épreuve : MATHÉMATIQUES	
	Section : Sciences expérimentales	
	Durée : 3 h	Coefficient : 3
SESSION 2016	Session principale	

(Le sujet comporte trois pages numérotées de 1/3 à 3/3)

Exercice 1 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1) Soit P et Q les plans d'équations respectives $x + y - z - 5 = 0$ et $x + y - z + 7 = 0$.

Montrer que les plans P et Q sont strictement parallèles.

- 2) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 1 = 0$.

a) Justifier que S est la sphère de centre I(1, 2, 1) et de rayon $R = \sqrt{5}$.

b) Montrer que $P \cap S$ est un cercle $\mathcal{C}$ de centre J(2, 3, 0) dont on déterminera le rayon.

c) Déterminer $Q \cap S$.

- 3) On donne les points A(0, 0, 1), B(0, 1, 2) et C(2, 2, 5).

a) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

b) Montrer que pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AM} = 2(x + y - z + 1)$.

- 4) Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour lesquels ABCM est un tétraèdre de volume égal à 2.

Exercice 2 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

- 1) a) Construire, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A et B.

b) Ecrire a et b sous forme algébrique.

- 2) La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B se coupent en un point C.

a) Déterminer l'affixe c du point C.

b) Vérifier que $c^2 = 1 + 2i\sqrt{6}$.

- 3) On considère le point D d'affixe c^2 .

a) Montrer que $OD = 5$.

b) En déduire une construction du point D.

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2 - 2z - i\sqrt{6} = 0$.

On désigne par z_1 la solution dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives et par z_2 l'autre solution.

5) Soit les points I , M_1 et M_2 d'affixes respectives 1 , z_1 et z_2 .

- Justifier que le point M_1 est le milieu du segment $[IC]$.
- Montrer que le quadrilatère OCM_1M_2 est un parallélogramme.
- Construire les points M_1 et M_2 .

Exercice 3 (6,5 points)

A) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - x + \frac{1}{x}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

b) Montrer que $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite Δ d'équation $y = -x$.

2) a) Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = -\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$.

b) Dresser le tableau de variations de f .

c) Calculer $f(1)$. En déduire le signe de $f(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$.

d) Montrer que $I(1, 0)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.

3) a) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

4) Soit $x > 0$.

a) Vérifier que $f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

b) En remarquant que $\sqrt{1+\frac{1}{x}} > 1$, montrer que $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

B) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

1) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_3 .

2) a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 1 - \frac{1}{n+1}$.

d) En déduire que (u_n) est convergente vers un réel ℓ et que $0,7 < \ell \leq 1$.

Exercice 4 (3,5 points)

Le tableau ci-dessous donne, pour les années indiquées, le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances. On désigne par (X, Y) la série statistique double, où X est le rang de l'année et Y est le taux de mortalité infantile pour 1000 naissances.

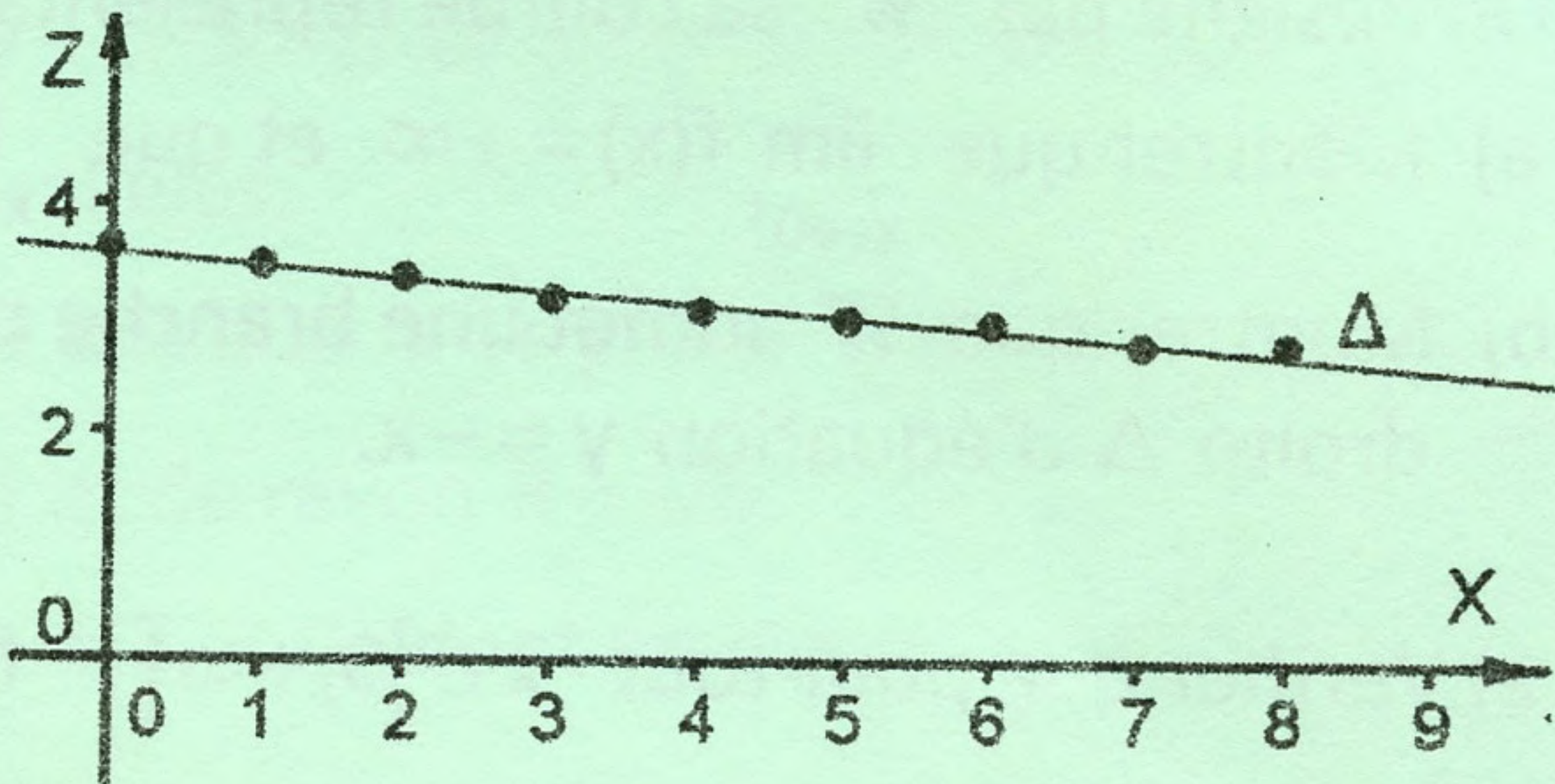
Année	1990	1993	1996	1999	2002	2005	2008	2011	2014
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Taux y_i	37,3	32,3	29,7	24,2	22,1	20,3	18,4	16,4	16,3

Source : INS 03-02-2016

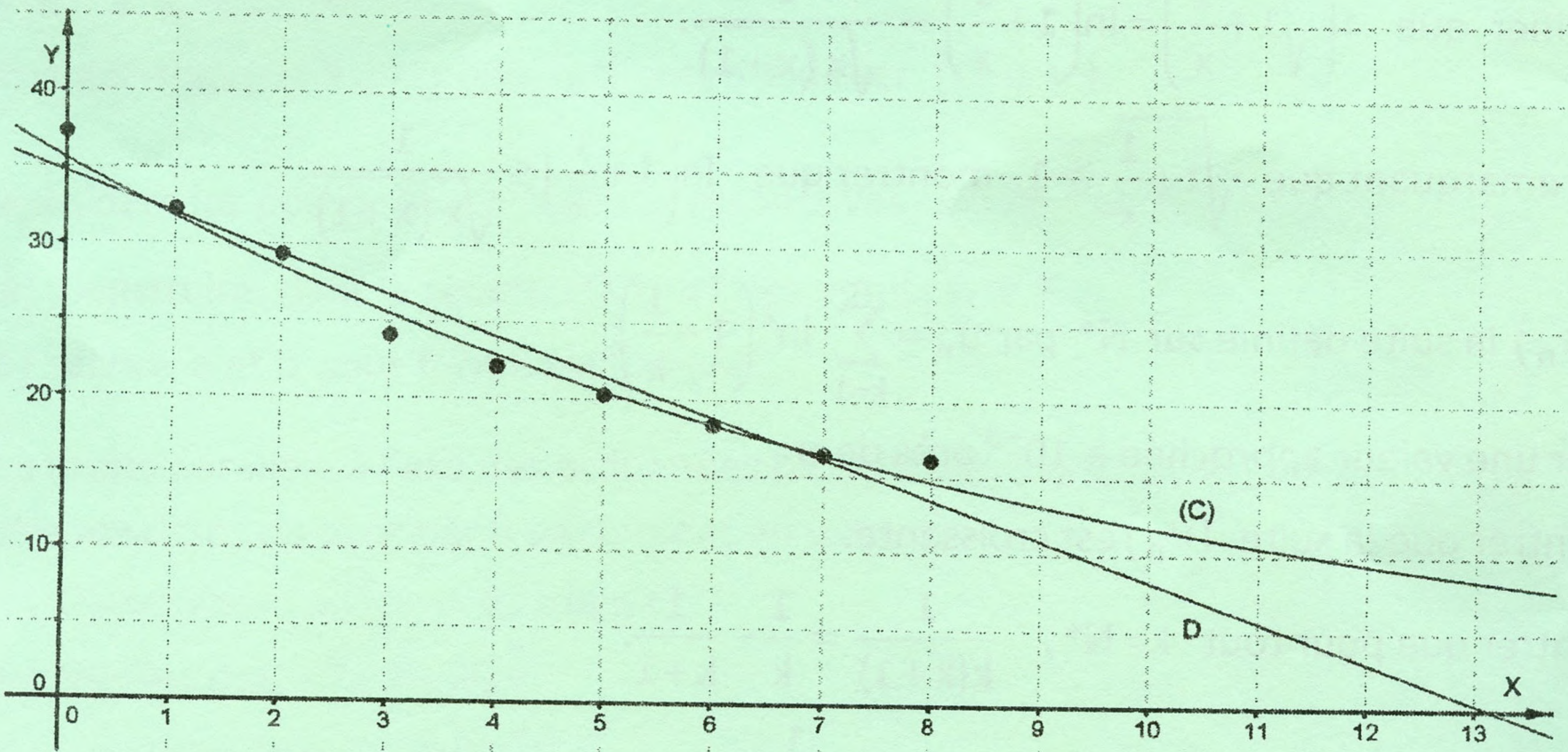
- 1) a) Déterminer, à 10^{-2} près, le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y .
b) Ecrire une équation de la droite de régression D de Y en X .
(les coefficients seront arrondis au centième).
c) Utiliser cet ajustement pour estimer le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances en 2020.

2) On pose $Z = \ln(Y)$.

Dans la figure ci-contre, on a représenté le nuage de points de la série statistique (X, Z) et la droite de régression Δ de Z en X dont une équation est $z = -0,11x + 3,57$.



- a) Justifier qu'on peut modéliser le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances par la relation $y = 35,52 e^{-0,11x}$.
b) Estimer, à l'aide de cet ajustement, le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances en 2020.
- 3) Dans la figure ci-dessous, on a représenté la droite D définie en 1) b), la courbe (C) d'équation $y = 35,52 e^{-0,11x}$ et le nuage de points de la série (X, Y) .



Lequel des deux ajustements proposés s'avère le plus adaptable à la situation ?
Justifier la réponse.