

Le sujet comporte quatre pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie

Exercice 1 (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Soit OADBCEFG le cube tel que $\vec{OA} = \vec{u}$, $\vec{OB} = \vec{v}$ et $\vec{OC} = \vec{w}$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AF] et [CG].

1) a) Déterminer les coordonnées des points E, I et J.

b) Vérifier que $\vec{OI} \wedge \vec{OJ} = \frac{1}{4}(\vec{u} - 4\vec{v} + 2\vec{w})$.

2) a) Calculer l'aire du triangle OIJ.

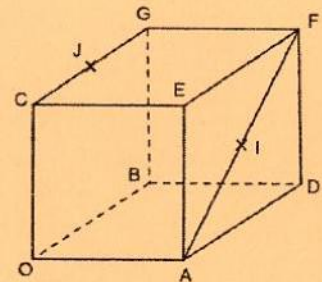
b) Calculer le volume du tétraèdre OIJE.

c) La droite passant par E et perpendiculaire au plan (OIJ) coupe le plan (OIJ) en un point H.

Sans calculer les coordonnées de H, justifier que $EH = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

3) Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + \frac{11}{7} = 0$.

Montrer que (S) est une sphère tangente au plan (OIJ).



Exercice 2 (5 points)

Dans la figure 1 de l'annexe jointe, $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan, (C) est le cercle de centre O et de rayon 1 et A est le point de (C) d'abscisse $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et d'ordonnée positive.

On note a l'affixe du point A.

1) Soit θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{OA})$.

a) Donner, en fonction de θ , l'écriture exponentielle des nombres complexes a, $\bar{a}$, a^2 et $\bar{a}^2$.

b) Construire sur l'annexe les points B, C et D d'affixes respectives $\bar{a}$, a^2 et $\bar{a}^2$.

2) a) Justifier que $a + \bar{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

b) Montrer que a et $\bar{a}$ sont les solutions de l'équation (E): $z^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z + 1 = 0$.

3) a) Montrer que pour tout nombre complexe z ,

$$z^5 - 1 = (z - 1) \left[z^2 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) z + 1 \right] \left[z^2 + \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) z + 1 \right].$$

b) En déduire que a est une racine cinquième de l'unité.

4) a) Donner sous forme exponentielle les racines cinquièmes de l'unité distinctes de 1.

b) Vérifier que $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est l'unique racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et la partie imaginaire sont strictement positives.

c) En déduire que $a = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

5) Soit I le point d'affixe 1.

Montrer que les points I, A, C, D et B sont les sommets d'un pentagone régulier.

Exercice 3 (4,5 points)

Le laboratoire d'un lycée est équipé de 10 microscopes dont 3 sont défectueux.

1) Le laborantin, ne distinguant pas à l'avance les microscopes défectueux des autres, tente de choisir un microscope fonctionnel ; il réalise l'épreuve suivante :

Il choisit un microscope (tous les microscopes ont la même probabilité d'être choisis) et teste sa fonctionnalité.

- Si ce microscope est non défectueux, le laborantin arrête le choix.

- Si le microscope choisi est défectueux, il le met à part et choisit un autre du lot restant jusqu'à ce qu'il obtienne un microscope non défectueux.

Soit A_n l'évènement : « Le premier microscope non défectueux est obtenu au $n^{\text{ième}}$ choix » et p_n sa probabilité.

a) Justifier que $n \leq 4$.

b) Calculer p_1 et p_2 .

c) Montrer que $p_3 = \frac{7}{120}$ et que $p_4 = \frac{1}{120}$.

2) Soit X la variable aléatoire qui à toute épreuve associe le rang du premier microscope non défectueux choisi.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance mathématique de X .

3) On suppose dans cette question que la durée de vie d'un microscope (c'est-à-dire la durée de fonctionnement (en année) avant la première panne) est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

a) Soit T un réel positif, on note $p(Y \leq T)$ la probabilité qu'un microscope ait une durée de vie inférieure ou égale à T années. Exprimer $p(Y \leq T)$ en fonction de λ et T .

b) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de λ si l'on sait que $p(Y \geq 5) = 0,7$.

c) On prend $\lambda = 0,071$.

Sachant qu'un microscope n'a pas eu de panne au cours des cinq premières années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

Exercice 4 (6,5 points)

- 1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 e^x$.
- a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- b) Comparer x et $\frac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants : $x \in]0, 1[$ et $x \in]1, +\infty[$.
- c) En déduire que si $x \in]0, 1[$ alors $g(x) < g(\frac{1}{x})$ et que si $x \in]1, +\infty[$ alors $g(x) > g(\frac{1}{x})$.
- 2) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}}$ et on désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
- b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 3) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = g(x) - g(\frac{1}{x})$.
- b) Calculer $f'(1)$.
- c) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) Dans la figure 2 de l'annexe jointe on a représenté, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $(\mathcal{C}_h)$ de la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$.
- a) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_h)$.
- b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
- 5) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\int_1^x (f(t) - h(t)) dt = (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$.
- b) Soit $\alpha \in]0, 1]$.
Exprimer en fonction de α , l'aire $\mathcal{A}_\alpha$ de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_h)$ et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$. Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{A}_\alpha$.

Annexe (à rendre avec la copie)

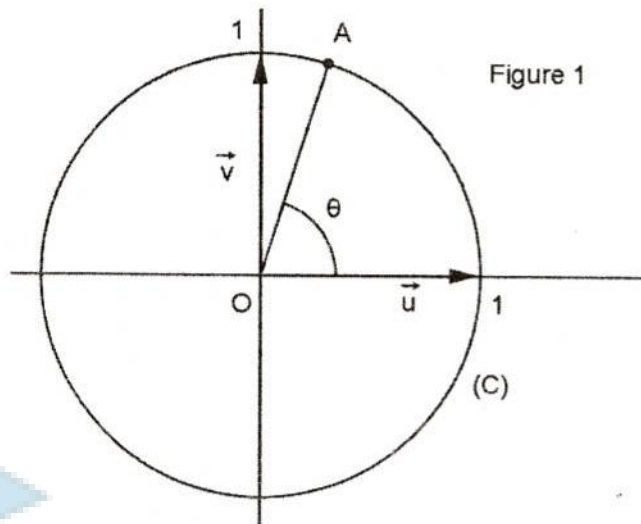


Figure 1

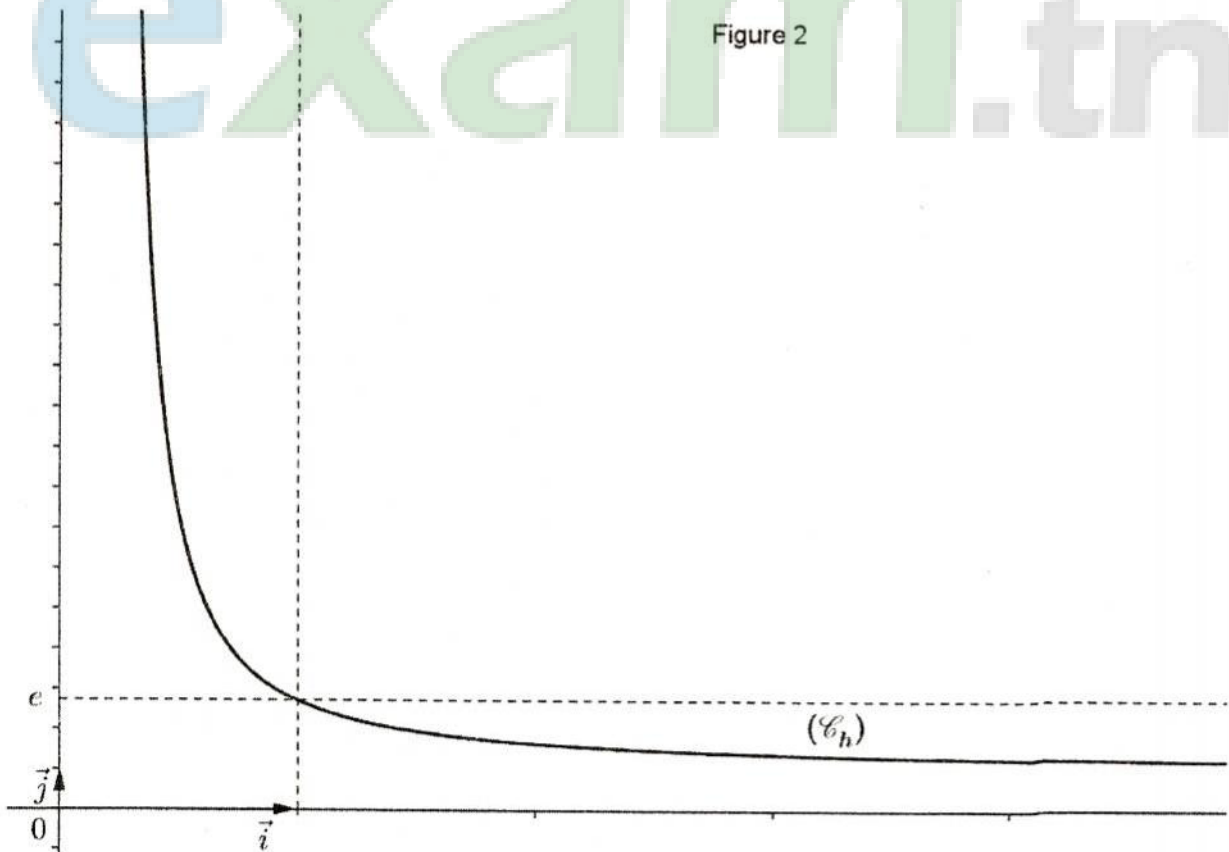


Figure 2