

$$a) \text{ On a } \begin{cases} \frac{AK}{AM} = \sqrt{2} \\ (\overline{AM}, \overline{AK}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases} \quad \text{donc } S(M) = K$$

b) On pose $S(F) = G$

On a AMF est un triangle rectangle isocèle de sommet principal A , donc $S(AMF) = AKG$ est un triangle rectangle isocèle de sommet principal $S(A) = A$.
D'où la construction de G

c) AKG est un triangle rectangle isocèle de sommet principal A et $(\overline{AK}, \overline{AF}) \equiv (\overline{AF}, \overline{AG}) (2\pi)$, donc $[AF)$ est la bissectrice intérieure de l'angle $(\overline{AK}, \overline{AG})$ par suite F est le milieu du segment $[KG]$

d) $S(M) = K$ et $S(F) = G$ d'où $S(MF) = (GK) = (KF)$ or (MF) passe par le point fixe I , donc (KF) passe par le point fixe $P = S(I)$.

$$S(I) = P \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \frac{AP}{AI} = \sqrt{2} \\ (\overline{AI}, \overline{AP}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases} \quad \text{d'où } AIP \text{ est un triangle rectangle isocèle de sommet}$$

principal I .

Exercice 3

1°) Si α est un réel non nul, alors les affixes des points M, N et P sont des réels, donc les points M, N et P sont sur l'axe des réels par suite ils sont alignés.

2°) $MNAP$ est un parallélogramme $\Rightarrow \overline{MN} = \overline{PA}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Z_N - Z_M &= Z_A - Z_P \\ \Rightarrow \frac{3}{2}\alpha^2 - \alpha &= -2 - \frac{8}{\alpha} \\ \Rightarrow 3\alpha^3 - 2\alpha^2 &= -4\alpha - 16 \\ \Rightarrow 3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 16 &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion : Si $MNAP$ est un parallélogramme alors α est une solution de l'équation (E).

$$3^\circ) \alpha = 1 + \sqrt{3}$$

$$a) \alpha = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad \frac{3}{2}\alpha^2 = 6e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad \frac{8}{\alpha} = \frac{8}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

$$b) \frac{3}{2}\alpha^2 = 6e^{i\frac{2\pi}{3}} = 6\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -3 + 3\sqrt{3}i \quad \text{et} \quad \frac{8}{\alpha} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 - 2\sqrt{3}i, \dots$$

$$\text{On a } \begin{cases} z_{\overline{MN}} = -3 + 3i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3} = -4 + 2i\sqrt{3} \\ z_{\overline{PA}} = -2 - 2 + 2i\sqrt{3} = -4 + 2i\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \overline{MN} = \overline{PA}$$

Et on a $\det(\overline{AM}, \overline{AN}) \neq 0$ c'est-à-dire que les points A, M et N ne sont pas alignés

donc $MNAP$ est un parallélogramme.

4°) a) α est une solution de $(E) \Rightarrow 3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 16 = 0$

$$\Rightarrow \overline{3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 16} = 0$$

$$\Rightarrow 3(\overline{\alpha})^3 - 2(\overline{\alpha})^2 + 4\overline{\alpha} + 16 = 0$$

$$\Rightarrow \overline{\alpha} \text{ est une solution de } (E).$$

Donc si α est une solution de (E) alors $\overline{\alpha}$ est une solution de (E) .

b) D'après a) Si $MNAP$ est un parallélogramme alors α et $\overline{\alpha}$ sont des solutions de (E) .

Pour $\alpha = 1+i\sqrt{3}$, $MNAP$ est un parallélogramme, donc $\alpha = 1+i\sqrt{3}$ et $\overline{\alpha} = 1-i\sqrt{3}$ sont des solutions de (E) .

Par suite, pour tout nombre complexe z , $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 =$

$$3(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})(z-\beta) \text{ avec } \alpha = 1+i\sqrt{3}.$$

Par identification on obtient, $-12\beta = 16$ donc $\beta = -\frac{4}{3}$.

Les solutions de (E) sont donc $t : 1+i\sqrt{3}, 1-i\sqrt{3}$ et $-\frac{4}{3}$

➤ La solution $-\frac{4}{3}$ est inacceptable car α est non réel.

➤ Pour $\alpha = 1-i\sqrt{3}$ on a $\begin{cases} z_{\overline{MN}} = -3 - 3i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3} = -4 - 2i\sqrt{3} \\ z_{\overline{PA}} = -2 - 2 - 2i\sqrt{3} = -4 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$

donc $\overline{MN} = \overline{PA}$, Par suite $MNAP$ est un parallélogramme.

Conclusion : Les affixes des points M pour lesquelles $MNAP$ est un parallélogramme sont $1+i\sqrt{3}$ et $1-i\sqrt{3}$.

Exercice 4

1°) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x \ln x + x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - \ln x + 1 \right) = -\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \ln x + 1 \right) = -\infty$$

b) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout $x > 0$ $f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1 + 1 = \frac{1}{x} - \ln x$

2°) a) Pour tout $x > 0$, $f'(x) = g(x) - h(x)$.

x	0	β	$+\infty$
Position	C_g au dessus de C_h		C_g au dessous de C_h
$f'(x) = g(x) - h(x)$	$+$	0	$-$

b) f est croissante sur $]0, \beta]$ et décroissante sur $[\beta, +\infty[$

c) On a C_h et C_g se coupent en un point d'abscisse $\beta > 0$, donc $h(\beta) = g(\beta)$ d'où $\ln \beta = \frac{1}{\beta}$.

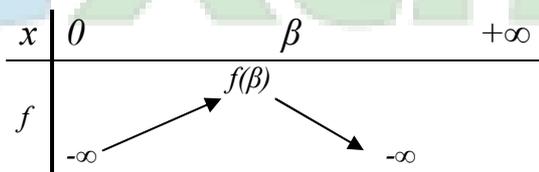
Par suite $f(\beta) = \ln \beta - \beta \ln \beta + \beta = \frac{1}{\beta} - 1 + \beta = \frac{1}{\beta} + \beta - 1$

3°) a) Pour tout $x > 0$, $f(x) - h(x) = x(1 - \ln x)$. Le signe de $f(x) - h(x)$ est celui de $1 - \ln x$.

x	0	e	$+\infty$
$f(x) - h(x)$	$+$	0	$-$
Position	C_f au dessus de C_h		C_f au dessous de C_h

Les deux courbes se coupent au point d'abscisse e .

b)



On a :

$$\rightarrow \begin{cases} f \text{ est continue et strictement croissante sur }]0, \beta] \\ f(]0, \beta]) =]-\infty, f(\beta)] \end{cases}$$

0 car $f(\beta) > 0$

Donc C_f coupe $(x'x)$ en un seul point d'abscisse $x_1 \in]0, \beta]$

Et on a encore $f(0.4) \times f(0.5) = [\ln(0.4) - (0.4)\ln(0.4) + 0.4][\ln(0.5) - (0.5)\ln(0.5) + 0.5] \approx -0.02 < 0$

Donc $0.4 < x_1 < 0.5$

$$\rightarrow \begin{cases} f \text{ est continue et strictement d\u00e9croissante sur } [\beta, +\infty[\\ f([\beta, +\infty[) =]-\infty, f(\beta)] \end{cases}$$

$$0 \quad \text{car } f(\beta) > 0$$

Donc C_f coupe $(x'x)$ en un seul point d'abscisse $x_2 \in [\beta, +\infty[$

$$\text{Et on a encore } f(3.8) \times f(3.9) = [\ln(3.8) - (3.8)\ln(3.8) + 3.8][\ln(3.9) - (3.9)\ln(3.9) + 3.9] \\ \approx -2.9 < 0$$

$$\text{Donc } 3.8 < x_2 < 3.9$$

En conclusion : la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 telles que $0.4 < x_1 < 0.5$ et $3.8 < x_2 < 3.9$

c) Voir graphique

Soit les points $I(1,0)$, $C(0, f(\beta))$ et $D(\beta, f(\beta))$.

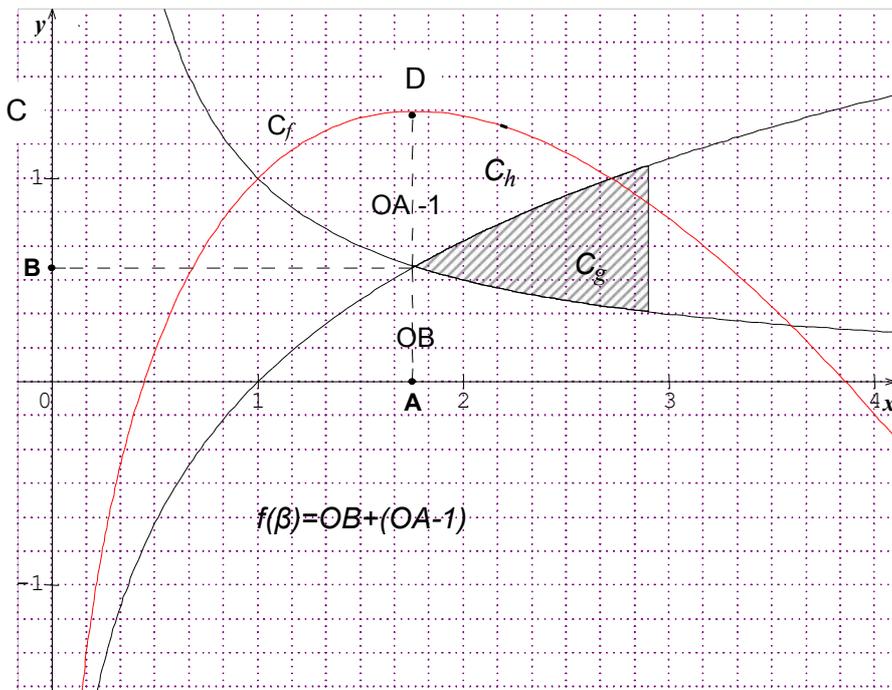
On a $f(\beta) = \frac{1}{\beta} + \beta - 1$ alors $f(\beta) - 1/\beta = \beta - 1$ donc $OC - OB = OA - OI > 0$ donc $BC = AI$

alors C est le point de $[OB) \setminus [OB]$ et tel que $BC = AI$

donc le point D est le point du plan admettant les points A et C comme projet\u00e9s orthogonaux sur les axes.

d) C_f admet :

- une tangente horizontale au point d'abscisse β .
- une branche parabolique de direction (yy') au voisinage de $+\infty$.
- l'axe des ordonn\u00e9es comme asymptote.



$$4^{\circ}a) \Delta(t) = \begin{cases} \int_t^{\beta} g(x) - h(x) dx & \text{si } 0 < t < \beta \\ \int_{\beta}^t h(x) - g(x) dx & \text{si } t > \beta \end{cases} = \begin{cases} \int_t^{\beta} f'(x) dx & \text{si } 0 < t < \beta \\ \int_{\beta}^t -f'(x) dx & \text{si } t > \beta \end{cases} = f(\beta) - f(t)$$

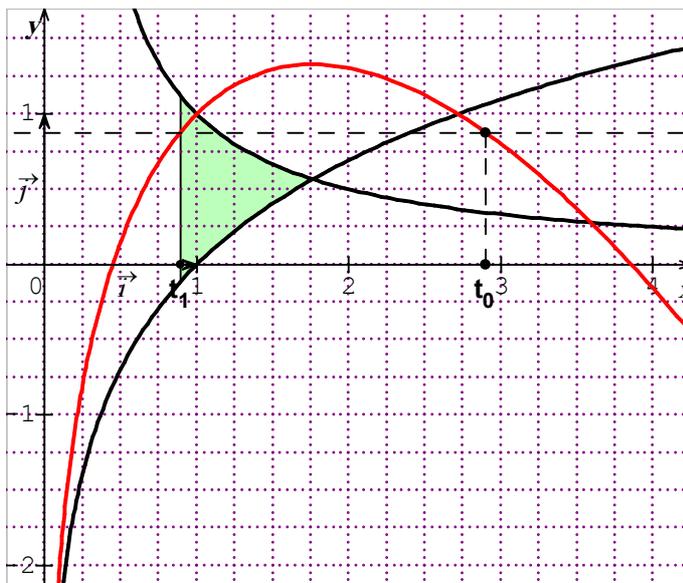
b) Voir graphique

c) $t_1 \in]0, \beta[$, $t_0 \in]\beta, +\infty[$

$$\begin{aligned} \Delta(t_1) = \Delta(t_0) &\Leftrightarrow f(\beta) - f(t_1) = f(t_0) \\ &\Leftrightarrow f(t_1) = f(t_0) \end{aligned}$$

Or $f(t_0) \in]-\infty, f(\beta)[$ et f réalise une bijection de $]0, \beta[$ sur $]f(\beta), +\infty[$, donc

il existe un seul réel $t_1 \in]0, \beta[$ tel que $\Delta(t_1) = \Delta(t_0)$



Exercice 5

1°) La fonction $t \rightarrow e^{\sqrt{t}}$ est continue et positive sur $[1, 2]$, donc

$$V = \int_1^2 \pi (e^{\sqrt{t}})^2 dt = \pi \int_1^2 e^{\sqrt{4t}} dt = \pi F(2)$$

2°) a) La fonction $t \mapsto e^{\sqrt{4t}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $1 \in [0, +\infty[$ donc F est dérivable

sur $[1, +\infty[$ et on a pour tout $x \in [1, +\infty[$, $F'(x) = e^{\sqrt{4x}}$

La fonction $x \mapsto \sqrt{4x}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et la fonction $t \mapsto te^t$ est continue sur \mathbb{R} donc la fonction G est dérivable sur $[1, +\infty[$ et on a pour tout $x \in [1, +\infty[$

$$G'(x) = (\sqrt{4x})' \cdot e^{\sqrt{4x}} + \sqrt{4x} \cdot e^{\sqrt{4x}} = 2e^{\sqrt{4x}} = 2F'(x)$$

b) Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $2F(x) = 2F(x) - 2F(1) = \int_1^x 2F'(t) dt = \int_1^x G'(t) dt = G(x) - G(1)$.

3°) a) Soit $x \in [1, +\infty[$, $G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t dt$.

On effectue une Intégration par partie :

On pose $\begin{cases} u(t) = t \\ u'(t) = 1 \end{cases}$

$$v'(t) = e^t \quad v(t) = e^t$$

$$\text{Pour tout } x \in [1, +\infty[, G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t dt = [te^t]_1^{\sqrt{4x}} - \int_1^{\sqrt{4x}} e^t dt = \sqrt{4x}e^{\sqrt{4x}} - e - e^{\sqrt{4x}} + e = (\sqrt{4x} - 1)e^{\sqrt{4x}}.$$

$$b) V = \pi F(2) = \pi \frac{G(2) - G(1)}{2} = \pi \frac{(\sqrt{8} - 1)e^{\sqrt{8}} - e^2}{2}$$

