

SECTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES

DURÉE : 4 Heures

COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

- 1) Soit z un nombre complexe de module 2.

Alors le conjugué \bar{z} de z est égal à

a) $\frac{\sqrt{2}}{z}$

b) $\frac{2}{z}$

c) $\frac{4}{z}$

- 2) Dans Le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A et B d'affixes

respectives 1 et i . L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\frac{z-i}{z-1}$ est réel est

- a) la droite (AB) privée de A
b) le segment [AB] privé de A
c) le cercle de diamètre [AB] privé de A

- 3) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $(-\ln 2)$. Alors la suite (v_n) définie par $v_n = e^{u_n}$ est

- a) une suite arithmétique de raison (-2)
b) une suite géométrique de raison (-2)
c) une suite géométrique de raison $(\frac{1}{2})$

- 4) La limite de $x \ln(1 + \frac{2}{x})$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à

- a) 0
b) 1
c) 2

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ et soit \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (unité graphique 2 cm)

- 1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 - b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$.
 - c) Déterminer la position relative de \mathcal{C} et Δ .
- 2) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f .

x	0		$+\infty$
$f(x)$	3	+	
$f(x)$	-1		$+\infty$

- a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans \mathbb{R}_+ , une seule solution α et vérifier que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.
 - b) Tracer la droite Δ et la courbe \mathcal{C} .
(On précisera la demi tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0 et on prendra $\alpha \simeq 0,4$).
- 3) On désigne par (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \int_{\alpha}^1 [f(x)]^n dx$.
- a) Calculer u_1 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
 - b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 - c) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3 (4 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N} par

$$\begin{cases} u_0 = 0 & ; \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \\ v_0 = 1 & ; \quad v_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $u_n \leq v_n$.
- 2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
- 3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.
- 4) Soit la suite (w_n) définie sur \mathbb{N} par $w_n = 9u_n + 5v_n$
 - a) Montrer que (w_n) est une suite constante.
 - b) En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n) .

Exercice 4 (5 points)

Dans l'annexe ci-jointe (page 4/4), ABCD est un rectangle de centre O et tel que $(\widehat{AB}, \widehat{AC}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Le point E désigne le symétrique du point A par rapport à D.

Soit S la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- 1) a) Justifier que $S(A) = B$
b) Montrer que le triangle ACE est équilatéral et en déduire que $S(E) = O$.
- 2) Soit I un point du segment [EO], distinct des points O et E et soit (Γ) le cercle de centre I et passant par A.
Les droites (AD) et (AB) recoupent le cercle (Γ) respectivement en M et P.
 - a) Tracer (Γ) et placer les points M et P.
 - b) Justifier que le point C appartient à (Γ) .
- 3) Soit N le projeté orthogonal du point C sur la droite (MP).
 - a) Montrer que $(\widehat{MP}, \widehat{MC}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.
 - b) En déduire que $S(M) = N$.
- 4) Montrer que les points B, D et N sont alignés.

Exercice 5 (3 points)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x + 4y = -8$.

- 1) a) Vérifier que $(0, -2)$ est une solution de (E).
b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).
- 2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère la droite Δ dont une équation est : $3x + 4y + 8 = 0$ et on désigne par A le point de Δ d'abscisse 0.
 - a) Montrer que si M est un point de Δ à coordonnées entières alors AM est un multiple de 5.
 - b) Soit N un point de Δ de coordonnées (x, y) .
Vérifier que $AN = \frac{5}{4} |x|$.
 - c) En déduire que si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.

Section : N° d'inscription : Série :

Nom et prénom :

Date et lieu de naissance :

Signature des
Surveillants

~~XX~~

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 4

