Epreuve de Math Section Math Session de contrôle 2009

Exercice n°1

De quoi s'agit-il ?

Nombres complexes-suites –fonction logarithme népérien-limites

CORRIGÉ

1) Réponse - c - 2) Réponse - a - 3) Réponse - c - 4) Réponse - c -

Exercice n°2

De quoi s'agit-il ?

Fonction exponentielle - suites – calcul intégral.

CORRIGÉ

1) a- En posant $t=-x$ on aura $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to-\infty}\left(\underbrace{-t}_{+\infty} - \underbrace{te^t}_{0} - \underbrace{e^t}_{0}\right) = +\infty$.

b- En posant $t=-x$ on aura $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim\limits_{t\to-\infty}\left(-\underbrace{te^t}_{0} - \underbrace{e^t}_{0}\right) = 0$

Donc la droite Δ d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

c- Soit $x\in[0,+\infty[$; $f(x)-x=(x-1)e^{-x}$

- sur $[0,1]$ la courbe $(\mathscr{C})$ est située au dessous de Δ .
- sur $[1,+\infty[$ la courbe $(\mathscr{C})$ est située au dessus de Δ .

2) a- f est définie et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f([0,+\infty[)$

de plus f est continue sur $[0,+\infty[$ donc $f([0,+\infty[)=[-1,+\infty[$.

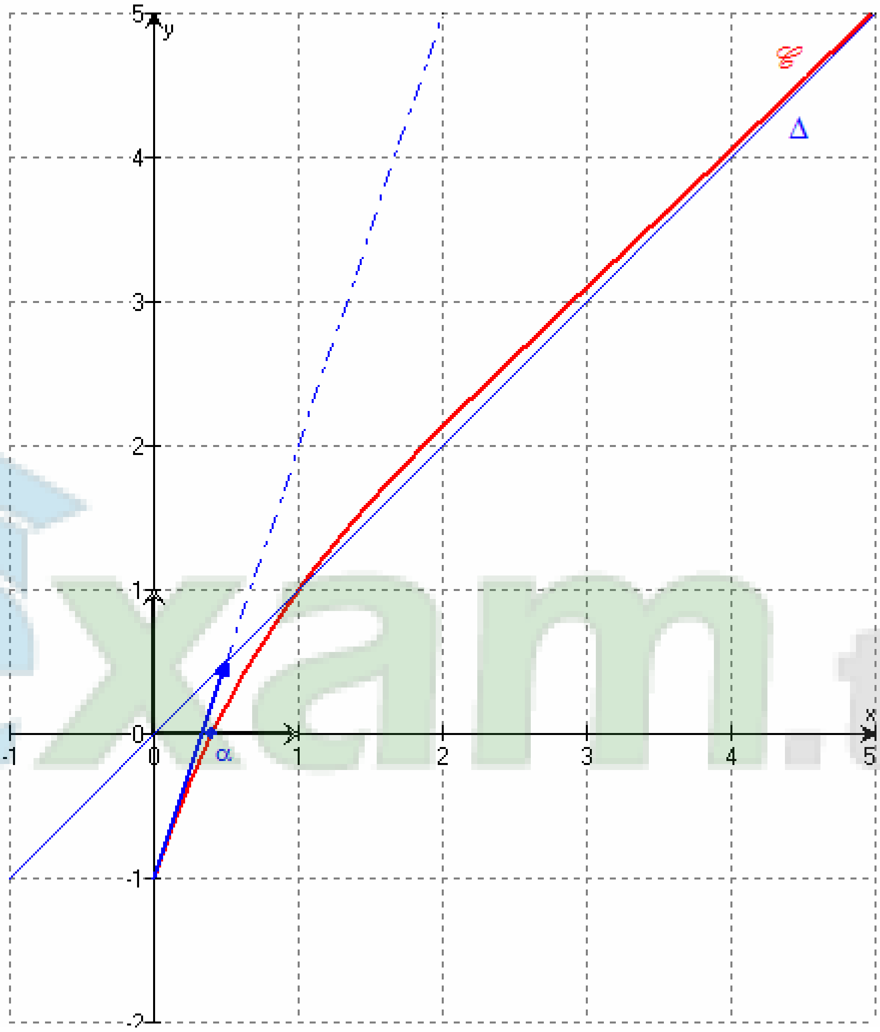
Comme $0\in[-1,+\infty[$ donc l'équation $f(x)=0$ admet dans $[0,+\infty[$ une solution unique α .

Puisque $f(0)=-1<0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)>0$ donc $0<\alpha<\frac{1}{2}$.

Conclusion : L'équation $f(x)=0$ admet dans $[0,+\infty[$ une solution unique $\alpha\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$.

b- D'après le tableau de variation de la fonction f on a : $f'(0)=3$

donc la demi tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0 est de coefficient directeur 3.



3) a- $u_1=\int_\alpha^1 f(x)\,dx=\int_\alpha^1\left(x+(x-1)e^{-x}\right)dx=\int_\alpha^1 x\,dx+\int_\alpha^1(x-1)e^{-x}dx$

Or $\int_\alpha^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^1=\frac{1}{2}(1-\alpha^2)$

$\int_\alpha^1(x-1)e^{-x}dx$ on intègre par parties on pose : $\begin{cases} u(x)=x-1 & \rightarrow & u'(x)=1 \\ v'(x)=e^{-x} & \rightarrow & v(x)=-e^{-x}\end{cases}$

Par suite $\int_\alpha^1(x-1)e^{-x}dx=\left[-(x-1)e^{-x}\right]_\alpha^1+\int_\alpha^1 e^{-x}dx=\left[-xe^{-x}\right]_\alpha^1=-\frac{1}{e}+\alpha e^{-\alpha}$

donc $u_1=\int_\alpha^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}(1-\alpha^2)-\frac{1}{e}+\alpha e^{-\alpha}$.

Interprétation : $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in[\alpha,1]$ donc u_1 représente l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations : $y=0$, $x=1$ et $x=\alpha$

b- sur $[0,1]$ la courbe $(\mathscr{C})$ est situé au dessous de Δ donc pour tout réel $x \in [0,1]$, $f(x) \leq x$

de plus pour tout $x \in [\alpha,+\infty[$, $f(x) \geq 0$ et $\alpha < 1$ ainsi pour tout $x \in [\alpha,1]$ on a : $0 \leq f(x) \leq x$

par suite $0 \leq \int_\alpha^1 [f(x)]^n dx \leq \int_\alpha^1 x^n dx$

d'où $0 \leq u_n \leq \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1$ or $\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1 = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{\alpha^{n+1}}{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1}$ donc $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

c- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ et $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice n°3

De quoi s'agit-il ?

Suites adjacentes

CORRIGÉ

1) Montrons, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

- vérification : pour $n = 1$ l'inégalité $u_1 \leq v_1$ est vraie (car $u_1 = \dfrac{1}{3}$ et $v_1 = \dfrac{2}{5}$)
- soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $u_n \leq v_n$ et montrons que $u_{n+1} \leq v_{n+1}$

Comme $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} = \dfrac{u_n - v_n}{15} \leq 0$ car $u_n - v_n \leq 0$ donc $u_{n+1} \leq v_{n+1}$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$.

2) • $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - u_n = -\dfrac{u_n - v_n}{3} \geq 0$ car $u_n - v_n \leq 0$ donc (u_n) est une suite croissante.

• $v_{n+1} - v_n = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} - v_n = \dfrac{3(u_n - v_n)}{5} \leq 0$ car $u_n - v_n \leq 0$ donc (v_n) est une suite décroissante.

3)<u>Première méthode</u>

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et (v_n) est une suite décroissante donc (v_n) est majoré par $v_0 = 1$

  Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.

  Ainsi (u_n) est une suite croissante et majoré par 1 donc converge.

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq u_n$ et (u_n) est une suite croissante donc (u_n) est minoré par $u_0 = 0$

  Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$.

Ainsi (v_n) est une suite décroissante et minoré par 0 donc converge.

 On pose $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)=l'$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=l$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1})=l$

Comme $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+v_n}{3}$ donc les opérations sur les limites des suites donnent $l=\dfrac{2l+l'}{3}$

D'où $l=l'$

Deuxième méthode

D'après ce qui précède on a : $u_{n+1}-v_{n+1}=\dfrac{1}{15}(u_n-v_n)$

Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n-v_n=-\left(\frac{1}{15}\right)^n$

vérification : l'égalité $u_0-v_0=-\left(\frac{1}{15}\right)^0$ est vraie (car $u_0=0$, $v_0=1$ et $-\left(\frac{1}{15}\right)^0=-1$)

supposons que $u_n-v_n=-\left(\frac{1}{15}\right)^n$

montrons que $u_{n+1}-v_{n+1}=-\left(\frac{1}{15}\right)^{n+1}$

on a : $u_{n+1}-v_{n+1}=\dfrac{1}{15}\left[-\left(\frac{1}{15}\right)^n\right]=-\left(\frac{1}{15}\right)^{n+1}$

donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n-v_n=-\left(\frac{1}{15}\right)^n$

Vu que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-\left(\frac{1}{15}\right)^n\right]=0$ car $\left(\frac{1}{15}\right)\in\left]-1,1\right[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$

Compte tenu :

- pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\le v_n$.
- (u_n) est une suite croissante et (v_n) est une suite décroissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et par suite elles convergent vers la même limite

4) a- pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1}=9u_{n+1}+5v_{n+1}=3(2u_n+v_n)+(3u_n+2v_n)=9u_n+5v_n=w_n$

Donc (w_n) est une suite constante.

b- (w_n) est une suite constante donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n=w_0=9u_0+5v_0=5$.

Par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, $9u_n + 5v_n = 5$.

Donc si L est la limite commune des suites (u_n) et (v_n) on aura $9L + 5L = 5$

Ce qui donne $L = \frac{5}{14}$ ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty}(v_n) = \frac{5}{14}$.

Exercice n°4

De quoi s'agit-il ?

Similitudes-angles inscrits –symétrie orthogonale.

CORRIGÉ

1) a- $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)\ [2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{2} - \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\ [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \qquad \text{donc} \quad \left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

De plus, comme ABC est un triangle rectangle en B donc $\frac{CB}{CA} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

D'où $\begin{cases} \frac{CB}{CA} = \frac{1}{2} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$ ce qui justifie que $S(A) = B$

b- D'une part $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)\ [2\pi]$

$$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)\ [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

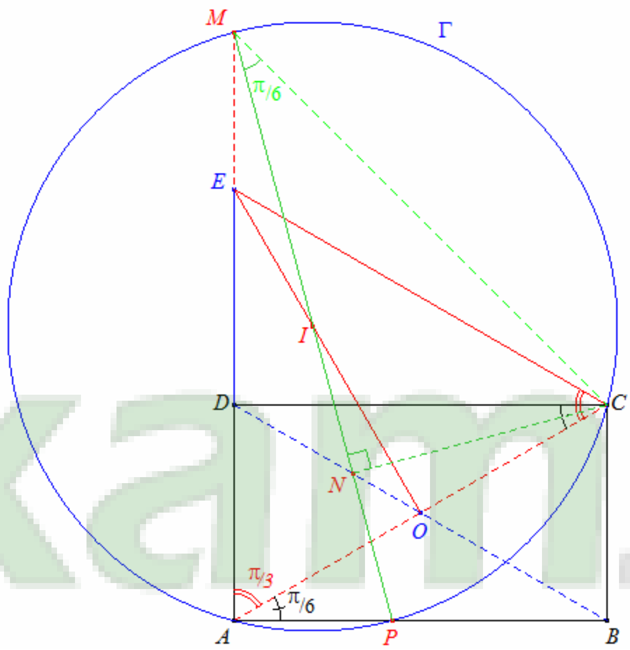
D'autre part $\left.\begin{array}{l} E = S_{(DC)}(A) \\ D = S_{(DC)}(D) \\ C = S_{(DC)}(C) \end{array}\right\}$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)\ [2\pi]$

Ainsi $\begin{cases} (\overrightarrow{AC},\widehat{\ \overrightarrow{AE}}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ (\overrightarrow{EC},\widehat{\ \overrightarrow{EA}}) \equiv (\overrightarrow{EC},\widehat{\ \overrightarrow{ED}})\ [2\pi] \\ \qquad\qquad \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$ ce qui prouve que le triangle ACE est équilatéral.

□ On a le triangle ACE est équilatéral et $O = A*C$ donc $\begin{cases} \dfrac{CO}{CE} = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \\ (\overrightarrow{CE},\widehat{\ \overrightarrow{CO}}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

Conclusion : $S(E) = O$.

2) a-



b- ACE est un triangle équilatéral et $O = A*C$ donc la droite (OE) est la médiatrice du segment $[AC]$

et puisque $I \in [OE] \setminus \{O,E\}$ donc $IA = IC$ or (Γ) est le cercle de centre I et le rayon IA

donc $C \in (\Gamma)$.

3) a- $(\overrightarrow{MP},\widehat{\ \overrightarrow{MC}})$ et $(\overrightarrow{AP},\widehat{\ \overrightarrow{AC}})$ sont deux angles inscrits dans (Γ) interceptant le même arc orienté $\overset{\frown}{PC}$

Donc $(\overrightarrow{MP},\widehat{\ \overrightarrow{MC}}) \equiv (\overrightarrow{AP},\widehat{\ \overrightarrow{AC}})\ [2\pi]$ or $(\overrightarrow{AP},\widehat{\ \overrightarrow{AC}}) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ donc $(\overrightarrow{MP},\widehat{\ \overrightarrow{MC}}) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

b- Comme $\begin{cases} (\overrightarrow{MN},\widehat{\ \overrightarrow{MC}}) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi] \\ (\overrightarrow{NC},\widehat{\ \overrightarrow{NM}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$ donc $(\overrightarrow{CM},\widehat{\ \overrightarrow{CN}}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ (I) de plus on a $\dfrac{CN}{CM} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ (II)

d'après (I) et (II) on en déduit $S(M) = N$

4) $M \in (AD)$ et $E \in (AD)$ donc A, E et M sont alignés de plus $\left.\begin{array}{r} S(A) = B \\ S(E) = O \\ S(M) = N \end{array}\right\}$

et comme toute similitude conserve l'alignement donc B, O et N sont alignés.

D'où $N \in (OB)$ et puisque $D \in (OB)$ on en déduit alors que B, D et N sont alignés.

Exercice n°5

De quoi s'agit-il ?

Résolution dans Z^2 d'une équation du type ax +by = c – détermination des points d'une droite à coordonnées entières

CORRIGÉ

1) a- $3 \times 0 + 4 \times (-2) = -8$ donc $(0, -2)$ est solution de (E).

b- Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ solution de (E).

On a : $\left.\begin{array}{l} 3 \times x + 4 \times y = -8 \\ 3 \times 0 + 4 \times (-2) = -8 \end{array}\right\}$ donc $3 \times x = -4 \times (y+2)$

comme $\left.\begin{array}{c} 3 / -4 \times (y+2) \\ 3 \wedge (-4) = 1 \end{array}\right\}$ alors d'après Gauss $3/(y+2)$ ainsi $y = 3k - 2$ où $k \in \mathbb{Z}$

par suite $3 \times x = -4 \times (3k)$ d'où $x = -4k$ ainsi $(x, y) = (-4k\ ,\ 3k-2)$ où $k \in \mathbb{Z}$

réciproquement : soit $(x, y) = (-4k\ ,\ 3k-2)$ où $k \in \mathbb{Z}$

on a : $3 \times (-4k) + 4 \times (3k - 2) = -8$ donc (x, y) est solution de (E).

Conclusion : $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \left\{ (-4k\ ,\ 3k-2)\ ,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) a- $\begin{cases} M(x, y) \in \Delta \\ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{cases}$ signifie $\begin{cases} 3x + 4y = -8 \\ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{cases}$ signifie $(x, y) = \left\{ (-4k\ ,\ 3k-2)\ ,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

Donc $AM = \sqrt{(-4k)^2 + (3k)^2} = 5 \times |k|$ où $k \in \mathbb{Z}$

Par suite AM est un multiple de 5.

b- $N(x, y) \in \Delta$ signifie $3x + 4y = -8$ signifie $y = -\dfrac{8+3x}{4}$

Donc $AN^2 = x^2 + \left(-\frac{3x}{4}\right)^2 = \dfrac{25}{16}x^2$ par suite $AN = \dfrac{5}{4}|x|$.

c- Si AN est un multiple de 5 alors il s'écrit sous la forme $AN = 5|k|$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc $\dfrac{5}{4}|x| = 5|k|$ où $k \in \mathbb{Z}$ ainsi $|x| = 4|k|$ où $k \in \mathbb{Z}$ d'où x est un entier

Comme $y = -\dfrac{8+3x}{4} = -2 - \dfrac{3x}{4}$ donc y = -2+3k où $k \in \mathbb{Z}$ d'où y est un entier

Conclusion : Si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.