

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION <b>EXAMEN DU BACCALAUREAT</b> <b>SESSION DE JUIN 2008</b>		<b>NOUVEAU REGIME</b> <b>SESSION PRINCIPALE</b>	
SECTION :	<b>MATHEMATIQUES</b>		
EPREUVE :	<b>MATHEMATIQUES</b>	DUREE : 4 h	COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3. La page 3/3 est à rendre avec la copie.

**Exercice n°1 ( 3 points )**

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.  
 Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.  
 Aucune justification n'est demandée.  
 Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

- La limite de  $(x+1+e^{-x})$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  est égale à  
 a)  $-\infty$ .                                      b) 0.    c)  $+\infty$ .
- Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{2x} - 1$ .  
 Alors  $f$  est une solution de l'équation différentielle  
 a)  $2y' = y + 2$ .                              b)  $y' = 2y + 2$ .                              c)  $y' = -2y - 2$ .
- La durée de vie  $X$ , exprimée en années, d'une machine automatique suit une loi exponentielle de paramètre 0,4.  
 La probabilité que la machine ne tombe pas en panne avant 10 ans est égale à  
 a)  $e^{-4}$ .                                      b)  $1 - 0,4e^{-4}$ .                              c)  $1 - e^{-4}$ .

**Exercice n° 2 ( 5 points )**

- Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1 page 3), on a représenté dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe  $(\mathcal{C})$  de la fonction  $f$  définie sur  $\left[\frac{1}{e}, e\right]$  par  $f(x) = \ln^3(x) - 3 \ln x$  et les demi-tangentes à la courbe  $(\mathcal{C})$  aux points d'abscisses respectives  $\frac{1}{e}$  et  $e$ .  
 a) En utilisant le graphique :  
 Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\left[\frac{1}{e}, e\right]$  sur  $[-2, 2]$ . (On note  $f^{-1}$  la fonction réciproque de  $f$  et  $(\mathcal{C}')$  la courbe représentative de  $f^{-1}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ).  
 b) Tracer la courbe  $(\mathcal{C}')$  et les demi-tangentes à  $(\mathcal{C}')$  aux points d'abscisses respectives  $-2$  et  $2$ .
- Soit la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  définie par  $a_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$ .  
 a) Calculer  $a_1$ .  
 b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier  $n \geq 1$  ;  $a_{n+1} = e - (n+1) a_n$ .  
 c) En déduire que  $a_3 = 6 - 2e$ .
- Soit  $\mathcal{A}$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $(\mathcal{C}')$  et les droites d'équations  $x = -2$  et  $x = 0$ .  
 a) Calculer  $\int_1^e f(x) dx$ .  
 b) En déduire  $\mathcal{A}$ .

**Exercice n°3 (4 points)**

1) Soit dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $3x - 8y = 5$ .

Montrer que les solutions de (E) sont les couples  $(x, y)$  tels que  $x = 8k - 1$  et  $y = 3k - 1$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

2) a) Soit  $n, x$  et  $y$  trois entiers tels que

$$\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$$

Montrer que  $(x, y)$  est une solution de (E).

b) On considère le système (S)  $\begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 7 \pmod{8} \end{cases}$  où  $n$  est un entier.

Montrer que  $n$  est solution du système (S) si et seulement si  $n \equiv 23 \pmod{24}$ .

3) a) Soit  $k$  un entier naturel.

Déterminer le reste de  $2^{2k}$  modulo 3 et le reste de  $7^{2k}$  modulo 8.

b) Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que l'entier  $(1991)^{2008} - 1$  est divisible par 24.

**Exercice n°4 (4 points)**

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans l'annexe ci-jointe ( Figure 2 page 3), OAB est un triangle rectangle isocèle tel que

$$OA = OB \text{ et } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

On désigne par I le milieu du segment [AB] et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B.

Soit  $f$  la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.

1) Montrer que  $f$  est de rapport 2 et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

2) a) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD.

b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur (AC).

Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par  $f$  et en déduire que J est le centre de la similitude  $f$ .

3) Soit  $g$  la similitude indirecte de centre I, qui envoie A sur D.

a) Vérifier que  $g$  est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire  $g(O)$ .

b) Déterminer les images de C et D par  $\text{gof}^{-1}$ . En déduire la nature de  $\text{gof}^{-1}$ .

4) Soit  $I' = f(I)$  et  $J' = g(J)$

a) Déterminer les images des points J et I' par  $\text{gof}^{-1}$ .

b) Montrer que les droites (IJ), (I'J') et (CD) sont concourantes.

**Exercice n°5 (4 points)**

L'espace  $\mathcal{E}$  est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère le tétraèdre ABCE tel que  $A(1, 0, 2)$ ,  $B(0, 0, 1)$ ,  $C(0, -1, 3)$  et  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ .

1) a) Vérifier que E a pour coordonnées  $(0, 2, 3)$ .

b) Calculer le volume du tétraèdre ABCE.

2) a) Soit  $\mathcal{P}$  le plan d'équation :  $x - 2y - z + 5 = 0$ . Montrer que  $\mathcal{P}$  est parallèle au plan (ABC).

b) Soit K le point défini par  $2\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$ . Calculer les coordonnées du point K et vérifier que K appartient au plan  $\mathcal{P}$ .

3) Soit  $h$  l'homothétie de centre E qui transforme le point C en K.

a) Déterminer le rapport de  $h$ .

b) Le plan  $\mathcal{P}$  coupe les arêtes [EA] et [EB] respectivement en I et J.

Calculer le volume du tétraèdre EIJK.

Exercice 2

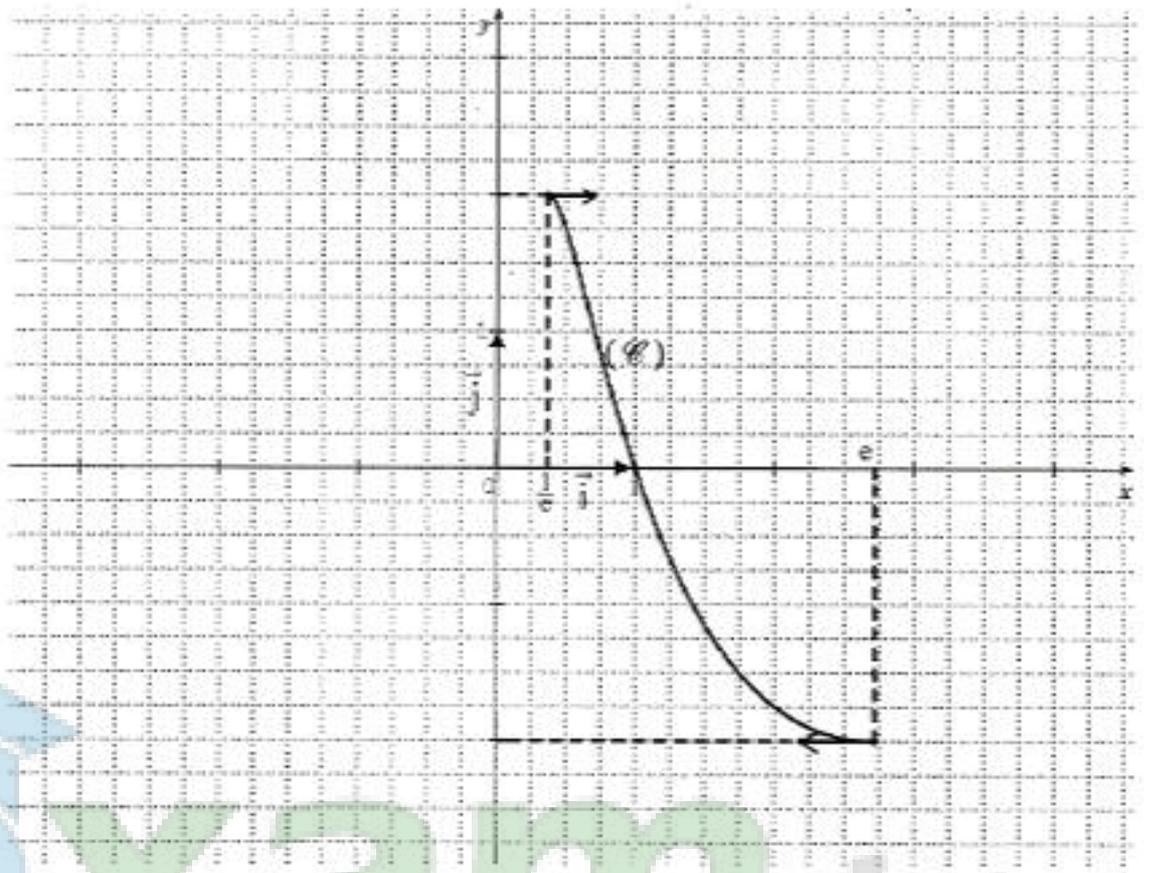


Figure 1

Exercice 4

Figure 2

