

Session de CONTROLE 2008

Section : Math

Epreuve : Mathématiques

Durée : 4 heures

Coefficient : 4

Exercice n°1

A-CONTENU

Calcul intégral-limites –Congruences

B-REPONSES

1) Réponse - b -

2) Réponse - c -

3) Réponse - c -

Exercice n°2

A-Contenu

-Résolution dans $\mathbb{C}$ d'une équation du troisième degré admettant une racine réelle .

-Similitude directe.

B- SOLUTION

$$(E) : z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8 = 0$$

1) a- Soit $z_0 = x$ ($x \in \mathbb{R}$) une solution réelle de (E) . Alors :

$$x^3 + (5+i)x^2 + (10+2i)x + 8 = 0 \text{ donc } (x^3 + 5x^2 + 10x + 8) + i(x^2 + 2x) = 0 \text{ par suite}$$

$$\begin{cases} x^3 + 5x^2 + 10x + 8 = 0 \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} x^3 + 5x^2 + 10x + 8 = 0 \\ x = 0 \text{ ou } x = -2 \end{cases} \text{ ainsi } \boxed{z_0 = -2}$$

(car $z = 0$ n'est pas une solution de (E))

b- comme $z_0 = -2$ est une solution de (E) , donc il existe deux nombres complexes b et c tels que

$$z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8 = (z+2)(z^2 + bz + c)$$

par identification ,on obtient : $b=3+i$ et $c=4$.

Par suite (E) : $(z+2)(z^2 + (3+i)z + 4) = 0$ donc $\begin{cases} z = -2 \\ z^2 + (3+i)z + 4 = 0 \end{cases}$

Réolvons l'équation $z^2 + (3+i)z + 4 = 0$

$$\Delta = (3+i)^2 - 16 = -8 + 6i = (1+3i)^2 \text{ ce qui donne } \begin{cases} z' = \frac{1}{2}(-3-i-1-3i) = -2-2i \\ z'' = \frac{1}{2}(-3-i+1+3i) = -1+i \end{cases}$$

Conclusion : les solutions de l'équation (E) sont donc -2 , $-2-2i$ et $-1+i$

2) a- L'écriture complexe de f est de la forme $z' = az + b$ où $a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (complexe non nul) et $b = 0$ donc f est une similitude directe de rapport $k = \sqrt{2}$, de centre O et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$.

b- On a $MM' = |(1+i)z - z| = |iz| = |z| = OM$

D'autre part , $M' = f(M)$ donc $OM'^2 = 2OM^2$

par suite $MM'^2 + OM^2 = 2OM^2 = OM'^2$

Ainsi OMM' est un triangle rectangle et isocèle en M .

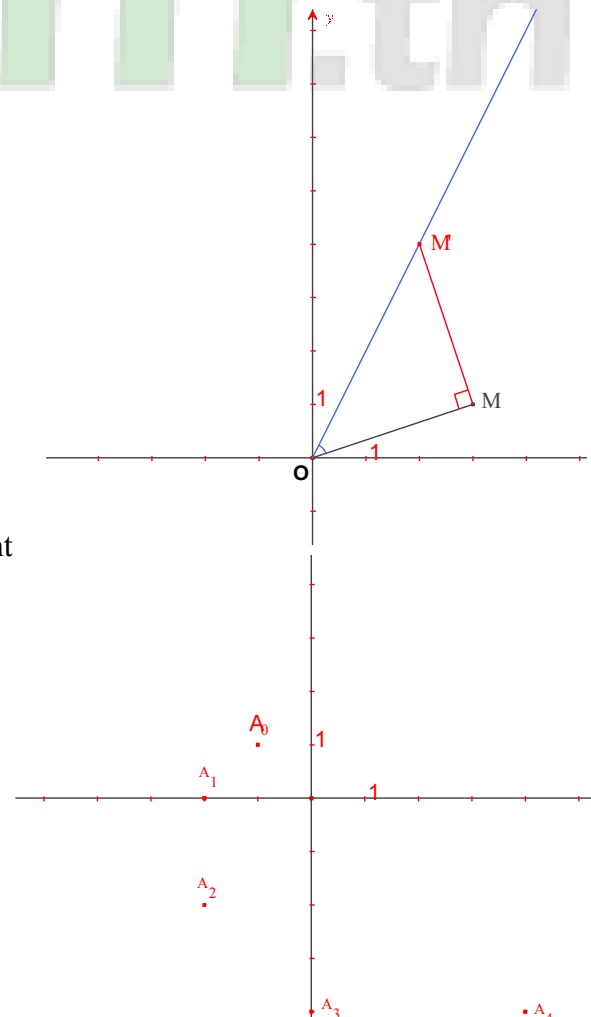
Construction :

On construit la demi-droite $[Ot)$

tel que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Ot}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

La perpendiculaire à (OM) issue de M coupe $[Ot)$

en M' d'où la construction.



3) a- pour tout $n \in \mathbb{N}$, désignons par z_n l'affixe du point

A_n . comme $A_{n+1} = f(A_n)$ alors $z_{n+1} = (1+i)z_n$.

Par suite $A_0(-1+i)$; $A_1(-2)$; $A_2(-2-2i)$

$A_3(-4i)$ et $A_4(4-4i)$.

b- On a : $z_n = (1+i)z_{n-1}$

On établit par récurrence que pour tout entier naturel

non nul n on a $z_n = (1+i)^n z_0$

Les points O , A_0 et A_n sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{OA_0}$ et $\overrightarrow{OA_n}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{OA_0}$ et $\overrightarrow{OA_n}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{z_n}{z_0}$ est réel

$\frac{z_n}{z_0}$ est réel si et seulement si $\arg(1+i)^n = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) si et seulement si $n \equiv 0 \pmod{4}$ et n non nul.

Exercice n°3

A-CONTENU

-Antidépassement : symétrie, symétrie glissante.

B-SOLUTION

1) a- $AB \neq 0$ et $AB = BD$ car ABD est équilatéral

alors il existe un unique antidépassement f qui envoie A sur B et B sur D .

b- On a $f \circ f(A) = D \neq A$

donc f est une symétrie glissante de vecteur

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AJ} \text{ (car } f \circ f = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}) \text{ et d'axe la droite passant par le point } I = A * B \text{ et par le point } O = B * D$$

.donc l'axe de cette symétrie glissante est la droite (OI) .

c- L'image du triangle direct ABD est un triangle indirect qui lui est isométrique

dont $f(A) = B$ et $f(B) = D$ sont deux sommets par suite l'image par f du triangle ABD est le triangle BDC

$$2) a- \left. \begin{array}{l} s(\{A, B, D\}) = \{B, C, D\} \\ s(A) = C \\ s \text{ est une bijection} \end{array} \right\} \text{ donc } s(\{B, D\}) = \{B, D\} \text{ ainsi } s([BD]) = [BD].$$

b- d'après ce qui précède on a

$$s([BD]) = [BD] \text{ et comme } O = B * D \text{ donc } s(O) = O \text{ par suite } s \text{ est un antidépassement}$$

Qui fixe le point O d'où il s'agit d'une symétrie orthogonale d'axe (BD)

$$3) a- \left. \begin{array}{l} g(\{A, B, D\}) = \{B, C, D\} \\ g(A) = D \\ g \text{ est une bijection} \end{array} \right\} \text{ donc } g(\{B, D\}) = \{B, C\} \text{ par suite on obtient : } g(D) = B \text{ ou } g(D) = C$$

or si $g(D) = C$ on aura $g(B) = B$ par suite g est une symétrie orthogonale ce qui n'est pas le cas car $g \circ g(A) = C \neq A$ donc $g(D) = B$.

b- on a déjà $g(A) = D$, $g(D) = B$ et g n'est pas une symétrie orthogonale car $g \circ g(A) = B \neq A$ donc g est une symétrie glissante donc de vecteur $\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI}$

(car $g \circ g = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$) et d'axe la droite passant par $J = A * D$ et par $O = B * D$ donc l'axe de la symétrie glissante g est la droite (OJ) .

Exercice n°4

A- CONTENU

- Fonction Logarithme.
- Continuité, dérivabilité, positions relatives de deux courbes.
- Calcul intégral, calcul d'aire.

B- SOLUTION

1) posons $t = x + 2$

$$a- \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x+2) \ln(x+2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0 = f(-2)$$

Donc f est continue à droite en (-2) .

$$b- \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \ln(x+2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty$$

c- f est dérivable sur $]-2, 2]$ et on a :

$$f'(x) = 1 + \ln(x+2). \quad f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-1} - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \ln(x+2) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t \ln t = +\infty$$

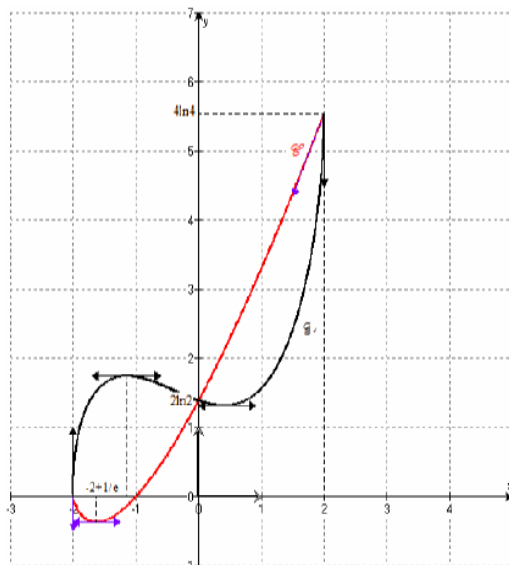
$$2) a- g(x) - f(x) = -x\sqrt{4-x^2}$$

x	-2	$e^{-1}-2$	2
$f'(x)$		0	
	-		+
$f(x)$	0		$+\infty$
		$-e^{-1}$	

x	-2	0	2
$g(x) - f(x)$		+	-
position	C Au dessous De C'		

Pour $x \in [-2, 0]$ la courbe C est au dessus de la courbe C' et pour $x \in [0, 2]$ la courbe C est au dessous de la courbe C'

b-



- 3) a-
- Si $\alpha < 0$ on obtient $\mathcal{A}_\alpha = \int_\alpha^0 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2} dx$
 - Si $\alpha > 0$ on obtient $\mathcal{A}_\alpha = \int_0^\alpha (f(x) - g(x)) dx = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2} dx$
- Ainsi pour tout $\alpha \in [-2, 2] \setminus \{0\}$ $\mathcal{A}_\alpha = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2} dx$

b- $\mathcal{A}_\alpha = -\frac{1}{2} \int_0^\alpha -2x\sqrt{4-x^2} dx = -\frac{1}{3} [(4-x^2)\sqrt{4-x^2}]_0^\alpha = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}(4-\alpha^2)\sqrt{4-\alpha^2}.$

c- $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{-2} + \mathcal{A}_2 = \frac{16}{3}$ u.a.

Exercice n°5

A-CONTENU

-Suite de fonctions ; suites numériques ; convergences de suites

B-SOLUTION

- 1) $f_n'(x) = -e^{-x} - (2n+1)x^{2n} < 0$ sur $[0, 1]$ donc f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

x	0	1
$f_n'(x)$	—	
$f_n(x)$	1	$e^{-1} - 1$

2) f_n est continue, strictement décroissante sur $[0,1]$ donc elle réalise une bijection de $[0,1]$

sur $f([0,1]) = [e^{-1}-1,1]$ et comme $0 \in]e^{-1}-1,1[$ alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique $u_n \in]0,1[$

3) a- Pour tout $x \in]0,1[$, on a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1}(1-x^2) > 0$

donc pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times]0,1[$ on a : $f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

b- Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times]0,1[$ on a : $f_{n+1}(x) > f_n(x)$ pour $x = u_{n+1}$ on aura $\boxed{f_n(u_{n+1}) < 0}$.

c- • $f_n(u_{n+1}) < 0$ donc $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$ et comme f_n est strictement décroissante alors sa réciproque l'est aussi et par suite $u_{n+1} > u_n$ ainsi (u_n) est une suite croissante.

• (u_n) est une suite croissante et majoré par 1 donc elle est convergente.

4) a- $f_n(u_n) = 0$ donc $e^{-u_n} = (u_n)^{2n+1}$ ainsi $\boxed{\ln u_n = -\frac{u_n}{2n+1}}$.

b- Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ alors on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{u_n}{2n+1}\right)$ donc $\ln \ell = 0$ par suite $\boxed{\ell = 1}$.

 **FIN.**