Section: Sciences Expérimentales **Session principale 2009**

Matière : Mathématiques (Corrigé)

Exercice n°1 (3 points)

- ✓ **Contenu :** Suites réelles – Fonctions numériques – Intégrales.
- ✓ **Aptitudes visées :** Décider de la convergence d'une suite réelle, appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et celui de la moyenne, calculer une limite, appliquer la propriété relative à l'intégrale et l'ordre.
- ✓ **Corrigé :**

1) V 2) F 3) V 4) F 5) V 6) F

Exercice n°2 (6 points)

- ✓ **Contenu :** Nombres complexes.
- ✓ **Aptitudes visées :** Déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe, représenter un point connaissant son affixe, interpréter géométriquement le module et l'argument d'un nombre complexe.
- ✓ **Corrigé :**

1) $B \in \mathscr{C}_{(O,2)}$ signifie $|z_B| = 2$

$(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ équivaut à $\arg(z_B) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

$z_B = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}) = 2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 + i\sqrt{3}$.

2) a- On a : $\begin{cases} \mathrm{Re}(z_C) = -\mathrm{Re}(z_B) \\ \mathrm{Im}(z_C) = \mathrm{Im}(z_B) \end{cases}$ d'où $C = S_{(O,\vec{v})}(B)$ (voir figure).

b- $\mathrm{aff}(\overrightarrow{OA}) = z_A = 2$ et $\mathrm{aff}(\overrightarrow{BC}) = z_C - z_B = 1 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3} = 2$ d'où

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ par suite OACB est un parallélogramme, de plus OA = OB = 2 .

Conclusion : OACB est un losange.

Remarque : On peut montrer que OACB est un parallélogramme en vérifiant que ses diagonales [AB] et [OC] ont même milieu.

3) a- $z_O = 0$ alors $z_O^3 = 0 \in \mathbb{R}_+$ d'où $O \in E$.

$z_A = 2$ alors $z_A^3 = 8 \in \mathbb{R}_+$ d'où $A \in E$.

$z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ alors $z_B^3 = 8e^{i2\pi} = 8$ d'où $B \in E$.

b- ● Si $M(z) \in [OB) \setminus \{O\}$ alors $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}) \equiv (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OB}})\ [2\pi]$ d'où $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$,

En posant $OM = |z| = r$, on aura $z_M = r\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ce qui donne $z_M^3 = r^3\, e^{i2\pi} = r^3 \in \mathbb{R}_+^*$ par suite $M \in E$.

● Si $M = O$ alors $M \in E$.

Conclusion : tout point M de la demi-droite [OB) appartient à E.

c- Soit z un nombre complexe non nul, de module r et d'argument θ.

$$z^3 \in \mathbb{R}_+^* \iff z^3 = |z^3| \iff r^3 e^{3i\theta} = r^3 \iff e^{3i\theta} = 1$$

$$\iff 3\theta = 2k\pi \text{ , } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\iff \theta = \frac{2k\pi}{3} \text{ , } k \in \mathbb{Z}.$$

d- ● D'après 3)c- si $z \neq 0$ alors $\theta = \frac{2k\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

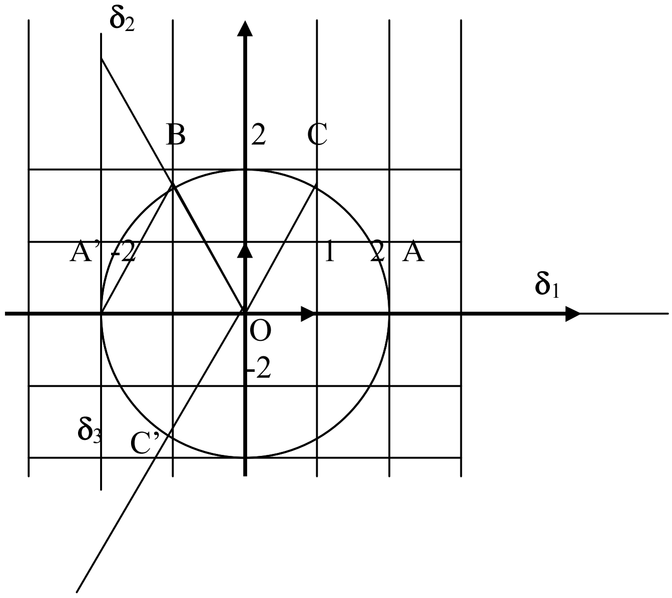
$k = 3k'$, $k' \in \mathbb{Z} \iff (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}) \equiv 0 [2\pi] \iff M \in [OA) - \{O\}$.

$k = 3k'+1$, $k' \in \mathbb{Z} \iff (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] \iff M \in [OB) - \{O\}$.

$k = 3k'+2$, $k' \in \mathbb{Z} \iff (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \frac{4\pi}{3} [2\pi] \iff M \in [OC') - \{O\}$ tel que $C' = S_O(C)$.

● D'après 3)a- $O \in E$

Conclusion : $E = [OA) \cup [OB) \cup [OC')$



Exercice n°3 (5 points)

- **Contenu :** Produit scalaire dans l'espace, produit vectoriel, plan de l'espace, distance d'un point à un plan, calcul de volumes, section d'une sphère par un plan.
- **Aptitudes visées :** Exploiter le produit scalaire et le produit vectoriel dans l'espace, déterminer une équation cartésienne d'un plan, déterminer la section d'une sphère par un plan, calculer le volume d'un tétraèdre.
- **Corrigé :**

A (0 , 0 , 0) ; B (2 , 0 , 0) ; D (0 , 4 , 0) ; E (0 , 0 , 3) .

1) a- $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

b- $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

c- $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}$ est un vecteur normal du plan (EBG),

donc une équation cartésienne du plan (EBG) est de la forme : $12x - 6y + 8z + d = 0$

et comme $E \in (EBG)$ donc $24 + d = 0$ signifie $d = -24$.

Conclusion : Une équation du plan (EBG) est : $6x - 3y + 4z - 12 = 0$.

2) a- Soit α un réel différent de 1 et M (2α , 4α , 3α) .

$\overrightarrow{AM} = 2\alpha\vec{i} + 4\alpha\vec{j} + 3\alpha\vec{k} = \alpha(2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}) = \alpha\overrightarrow{AG}$ et $\alpha \neq 1$ donc $M \in (AG)$ et $M \neq G$.

b- On a : $12\alpha - 12\alpha + 12\alpha - 12 = 12(\alpha - 1) \neq 0$ car $\alpha \neq 1$ donc M n'appartient pas au plan (EBG).

Autrement : $A \notin (EBG)$ donc $(AG) \not\subset (EBG)$ de plus $(AG) \cap (EBG) = \{G\}$ et comme M décrit la droite (AG) privé du point G donc $M \notin (EBG)$

3) a- V = le volume du tétraèdre MEBG .

$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}) \cdot \overrightarrow{EM}\right|$ or $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix} 2\alpha \\ 3\alpha \\ 3\alpha - 3 \end{pmatrix}$

Donc $V = \frac{1}{6}\left| 24\alpha - 24\alpha + 24(\alpha - 1) \right| = 4\left| \alpha - 1 \right|$.

b- Le volume du tétraèdre AEBG est égal au volume du tétraèdre MEBG pour M = A

c'est à dire pour, donc il est égal à 4.

c- Le volume du parallélépipède ABCDEFGH est égal à $2 \times 4 \times 3 = 24$

V est égal au volume du parallélépipède ABCDEFGH signifie $4\left|\alpha - 1\right| = 24$

signifie $\left| \alpha - 1 \right| = 6$ signifie $\alpha = 7$ ou $\alpha = -5$.

Exercice n°4 (6 points)

- **Contenu :** Fonctions numériques ; limites, continuité, dérivabilité, variation, courbe, Calcul d'aire.
- **Aptitudes visées :** Interpréter graphiquement la position relative des courbes de deux fonctions et le signe de leur différence, étudier les variations d'une fonction et tracer sa courbe, calculer une aire plane.
- **Corrigé :**

1) a- $u(2) = -4 + 2 = -2 < 0$ et $v(2) = 2\ln 2 > 0$ d'où Γ est la courbe de u et **C** est la courbe de v .

Remarque : On peut aussi calculer les limites de u(x) et v(x) en $+\infty$ et conclure.

b- si $x \in [0, 1]$, Γ est au dessus de **C** d'où $u(x) - v(x) \geq 0$.

si $x \in [1, +\infty[$, Γ est au dessous de **C** d'où $u(x) - v(x) \leq 0$.

2) Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x$ si $x \succ 0$ et $f(0) = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x\ln x\right) = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \to 0^+} x\ln x = 0 .$$

Conclusion : f est dérivable à droite en 0 et on a $f_d'(0) = 0$.

3) a- Pour tout $x > 0$; $f'(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}(2x\ln x + x) = -x^2 + x - x\ln x = u(x) - v(x)$.

Pour $x = 0$, $f_d'(0) = 0 = u(0) - v(0)$.

Conclusion : pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = u(x) - v(x)$

b- $\mathcal{A} = \int_0^1 (u(x) - v(x))\,dx = \int_0^1 f'(x)\,dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{5}{12}$ u.a

4) a- On a pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = u(x) - v(x)$ par suite et d'après 1)b- on a le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	$\frac{5}{12}$	↘	$-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{-1}{3}+\frac{3}{4x}-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$$

b- $f(0) = 0$ et f est strictement croissante sur $[0,1]$.

On désigne par f_1 la restriction de f à l'intervalle $I = [1,+\infty[$. f_1 est continue strictement décroissante sur I , donc f_1 réalise une bijection de I sur $J = \left]-\infty,\frac{5}{12}\right]$, or $0 \in J$ d'où il existe un réel α unique appartenant à J tel que $f_1(\alpha) = 0$.

$f(1{,}5) \approx 0{,}106 > 0$ et $f(1{,}6) \approx -0{,}04 < 0$ donc $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$.

Conclusion : $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α autre que O .

c- $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2}{3}+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}x\ln x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{-x}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln x\right) = -\infty$ d'où $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.