CORRIGE

Exercice 1 :

- ✓ **Contenu :** limites de fonctions (ln et exp), équations différentielles.
- ✓ **Aptitudes visées :** Calculer des limites en utilisant des limites usuelles, vérifier une équation différentielle par une fonction donnée.
- ✓ **Corrigé :**

Les choix corrects sont :

1°) Choix (c) : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - x\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2(1-\dfrac{\ln x}{x}) = +\infty$.

2°) Choix (a) : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2(\dfrac{e^{2x}-1}{2x}) = 2$

3°) Choix (b) : $f'(x) = ke^{kx}$, f est solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ pour $k = 2$

Exercice 2 :

- ✓ **Contenu : Nombres complexes**
- ✓ **Aptitudes visées:** Résoudre une équation complexe du second degré, interpréter géométriquement des affixes de points pour : déterminer la nature d'un triangle, décider de la perpendiculaire de deux droites.
- ✓ **Corrigé :**

1°) a°) Il s'agit d'un développement utilisant une identité remarquable :

$$(5+2i)^2 = 5^2 + 2.5.(2i) + (2i)^2 = 25 + 20i - 4 = 21 + 20i .$$

1°) b°) Il s'agit d'une équation complexe du second degré dont le discriminant est :

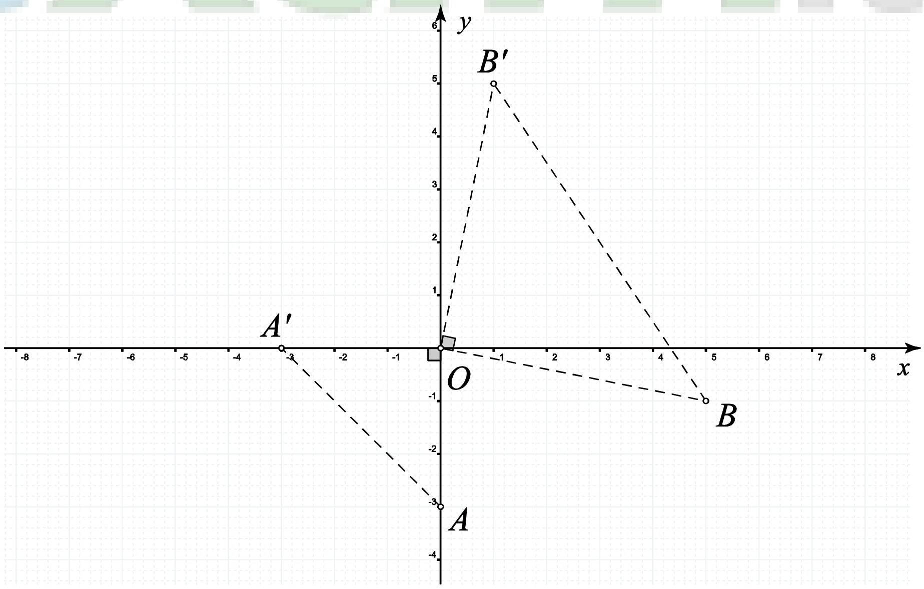
$$\Delta = \left[-(5-4i)\right]^2 - 4(-3-15i) = (5-4i)^2 + 12 + 60i = 25 - 40i - 16 + 12 + 60i = 21 + 20i$$

En tenant compte du résultat précédemment établi en 1°) a°) , on peut écrire : $\Delta = (5+2i)^2$

Ce qui se traduit encore par : les racines carrées complexes de Δ sont : $\delta_1 = 5 + 2i$ et $\delta_2 = -5 - 2i$

Les solutions de l'équation sont donc : $z_1 = \dfrac{(5-4i)-(5+2i)}{2} = -3i$ et $z_2 = \dfrac{(5-4i)+(5+2i)}{2} = 5 - i$.

2°) a°)



Note : On veillera à dresser un repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ orthonormé direct .

2°) b°)

- Triangle OAA' :

Les deux points A et A' appartiennent respectivement aux axes $(O,\vec{v})$ et $(O,\vec{u})$.

Ces axes étant perpendiculaires, le triangle OAA' est donc rectangle en O.

$OA = |-3i| = 3$ et $OA' = |-3| = 3$ alors le triangle OAA' est isocèle en O.

• Triangle OBB' :

Le rapport $\frac{z_{B'}}{z_B} = \frac{1+5i}{5-i} = ... = i$ est imaginaire pur. On en déduit que OBB' est rectangle en O.

$OB = |5-i| = \sqrt{26}$ et $OB' = |1+5i| = \sqrt{26}$ alors OBB' est isocèle de sommet principal O.

Note : Méthode alternative acceptable : Réciproque de Pythagore : $OB^2 = 26$, $OB^2 = 26$, $BB'^2 = 52$.

3°) a°)

$M \in (AB)$ signifie " $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires " signifie $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB}$, $k \in \mathbb{R}$

signifie $z_M + 3i = k\left[(5-i)-(-3i)\right]$, $k \in \mathbb{R}$ signifie $z_M + 3i = k\left[5+2i\right]$, $k \in \mathbb{R}$

signifie $z_M = 5k + (2k-3)i$, $k \in \mathbb{R}$

3°) b°) Le raisonnement est le suivant :

" (OM) et $(A'B')$ sont perpendiculaires" signifie " $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont orthogonaux" signifie

" $\frac{z_M}{(1+5i)-(-3)}$ est imaginaire pur" signifie " $\frac{5k+(2k-3)i}{4+5i}$ est imaginaire pur" signifie

" $(30k-15) - i(17k-12)$ est imaginaire pur" signifie $30k - 15 = 0$ signifie $k = \frac{1}{2}$ signifie $z_M = \frac{5-4i}{2}$

Note : L'absence de connecteurs logiques a été sanctionnée

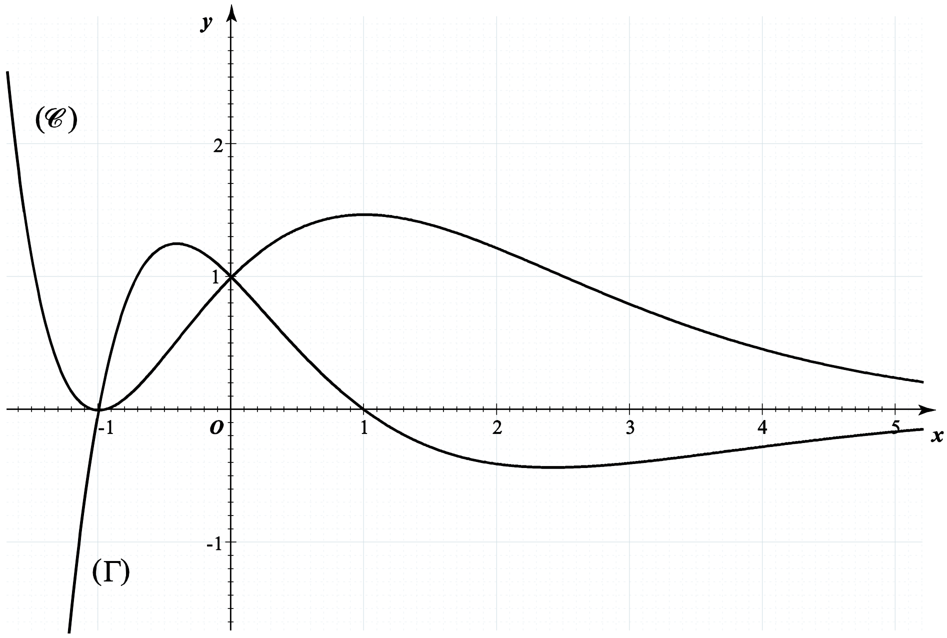
Par ailleurs, l'affixe du point milieu du segment $[AB]$ est $z_{A*B} = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-3i+5-i}{2} = \frac{5-4i}{2}$

Pour $z_M = \frac{5-4i}{2}$, on a : $2OM = 2\left|\frac{5-4i}{2}\right| = \sqrt{41}$ et $A'B' = |4+5i| = \sqrt{41}$ = 2OM

Exercice 3 :

- ✓ **Contenu :** Etude de fonctions, calcul intégral, calcul d'aires, fonction réciproque et dérivabilité, théorème des valeurs intermédiaires.
- ✓ **Aptitudes visées :** Interpréter graphiquement une courbe, calculer une aire en utilisant une intégration par parties, appliquer le théorème de la réciproque et celui des valeurs intermédiaires, étudier la dérivabilité de la réciproque d'une fonction bijective.
- ✓ **Corrigé :**

A°) 1°)



L'idée repose sur le principe suivant :

" Le signe de la fonction dérivée d'une fonction indique les variations de la fonction ".
On constate, graphiquement, que la courbe $(\mathscr{C})$ est celle d'une fonction positive sur IR .
Si jamais $(\mathscr{C})$ représentait la fonction dérivée f', la fonction f serait alors croissante sur $\mathbb{R}$.
L'allure de la courbe (Γ) ne correspondant pas à ce profil , (Γ) ne peut donc pas représenter la fonction f .

On retient alors que $(\mathscr{C})$: Courbe représentative de f.
(Γ) : Courbe représentative de f'.

A°) 2°) $f(0)=1$: lecture graphique immédiate sur la courbe $(\mathscr{C})$
$f'(0)=1$: lecture graphique immédiate sur la courbe (Γ)
$f(-1)=0$: lecture graphique immédiate sur la courbe $(\mathscr{C})$
$f'(-1)=0$: lecture graphique immédiate sur la courbe (Γ)

A°) 3°) On a : $\mathscr{A} = \int_{-1}^{0} f'(x)\,dx = \left[f(x)\right]_{-1}^{0} = f(0)-f(-1) = 1-0 = 1$ (ua)

B°) 1°) a°) L'intégrale se présente sous la forme : $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}(x+1)^2 e^{-x}\,dx$ et l'énoncé nous invite à procéder à une double intégration par parties qu'il faudra effectuer convenablement :

<u>Première intégration par parties</u> : Notons $\begin{cases} u_1(x)=(x+1)^2 \\ v_1'(x)=e^{-x} \end{cases}$, $\begin{cases} u_1'(x)=2(x+1) \\ v_1(x)=-e^{-x} \end{cases}$

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-0}^{0}(x+1)^2 e^{-x}\,dx = \left[-(x+1)^2 e^{-x}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -2(x+1)e^{-x}\,dx =$$
$$\left[-(x+1)^2 e^{x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} 2(x+1)e^{x}\,dx$$

Cette dernière intégrale nécessite, à son tour, une nouvelle intégration par parties

<u>Deuxième intégration par parties</u> : Notons $\begin{cases} u_2(x)=2(x+1) \\ v_2'(x)=e^{-x} \end{cases}$, $\begin{cases} u_2'(x)=2 \\ v_2(x)=-e^{-x} \end{cases}$

$$\int_{-1}^{0} 2(x+1)e^{-x}\,dx = \left[-2(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} 2e^{-x}\,dx = \left[-2(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \left[-2e^{-x}\right]_{-1}^{0} = \left[-2(x+2)e^{-x}\right]_{-1}^{0}$$

On obtient : $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \left[-(x+1)^2 e^{x}\right]_{-1}^{0} + \left[-2(x+2)e^{-x}\right]_{-1}^{0} = \left[-(x^2+4x+5)e^{-x}\right]_{-1}^{0} = 2e-5$

B°) 1°) b°)
$$\mathscr{A}' = \int_{-1}^{0}\left(f'(x)-f(x)\right)dx = \mathscr{A} - \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = 1-(2e-5) = 6-2e \quad (\,ua\,)$$

B°) 2°) a°**)** La fonction g est dérivable sur $[1,+\infty[$ et on a :
Pour tout $x\in[1,+\infty[$, $g'(x) = 2(x+1)e^{-x}-(x+1)^2e^{-x} = (1-x^2)e^{-x}$.
On retient que : Pour tout $x\in]1,+\infty[$, $g'(x)<0$ et que par conséquent :
g est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.
g réalise donc une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ sur $J=g([1,+\infty[)$
g étant continue sur $[1,+\infty[$, l'ensemble $J=g([1,+\infty[)$ est l'intervalle $J = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\,,\,g(1)\right]$.
On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}+2xe^{-x}+e^{-x} = 0$.
On a : $g(1)=4e^{-1}=\dfrac{4}{e}$.

En définitive : g réalise une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ sur $J=\left]0,\dfrac{4}{e}\right]$.

$\boxed{\textbf{Note}}$: La stricte décroissance ainsi que la continuité de g sur $[1,+\infty[$ peuvent être justifiées graphiquement .
$\boxed{\textbf{Note}}$: La détermination de la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ peut être justifiée graphiquement : asymptote horizontale ….
$\boxed{\textbf{Note}}$: La détermination de la valeur <u>exacte</u> de $g(1)=\dfrac{4}{e}$ est exigée .

B°) 2°) b°) Dans $[1,+\infty[$, l'équation $g(x)=x$ est équivalente à : $g(x)-x=0$ ou encore à l'équation $\varphi(x)=0$, où φ désigne la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $\varphi : x \mapsto g(x)-x$.

Tout revient à montrer que l'équation $\varphi(x)=0$, possède , dans $[1,+\infty[$, une unique solution α vérifiant $1,41<\alpha<1,42$.

La fonction φ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et pour tout $x\in[1,+\infty[$,

$\varphi'(x) = g'(x)-1=(1-x^2)e^{-x}-1$.

On retient que : Pour tout $x\in]1,+\infty[$, $\varphi'(x)<0$ et que par conséquent :

φ est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

φ réalise donc une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ sur $K=\varphi([1,+\infty[)$

φ étant continue sur $[1,+\infty[$, l'ensemble $K=\varphi([1,+\infty[)$ est l'intervalle $K=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\,,\,\varphi(1)\right]$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)-1=-1$.

On a : $\varphi(1)=g(1)-1=\dfrac{4-e}{e}$.

En définitive : φ réalise une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ sur $K=\left]-1,\frac{4-e}{e}\right]$.

$0\in\left]-1,\frac{4-e}{e}\right]$, l'équation $\varphi(x)=0$, possède, dans $[1,+\infty[$, une unique solution α .

La fonction φ est continue sur $[1,41\,;\,1,42]$ et vérifie $\varphi(1,41).\varphi(1,42)<0$.

On a alors , en vertu du théorème des valeurs intermédiaires , $1,41<\alpha<1,42$

Note : Concernant l'existence du réel α , un méthode alternative est acceptable (accorder 0.5) :
Justification graphique de la seule existence à l'aide de $\Delta : y=x$.

B°) 2°) c°) La fonction g réalise une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ sur $J=\left]0,\frac{4}{e}\right]$

La fonction g possède donc une fonction réciproque g^{-1} définie de $J=\left]0\,,\,\frac{4}{e}\right]$ sur $[1,+\infty[$.

De l'égalité $g(\alpha)=\alpha$, on tire : $g^{-1}(\alpha)=\alpha$.

g étant :
- d'une part , dérivable sur $[1,+\infty[$ et en particulier en $\alpha=g^{-1}(\alpha)$
- d'autre part , vérifiant $g'(\alpha)=(1-\alpha)^2e^{-\alpha}\neq 0$

on en déduit que : La fonction g^{-1} est dérivable en α .

$$\left(g^{-1}\right)'(\alpha)=\frac{1}{g'\left(g^{-1}(\alpha)\right)}=\frac{1}{g'(\alpha)}=\frac{1}{(1-\alpha)^2e^{-\alpha}}==\frac{e^{\alpha}}{1-\alpha^2}\qquad \textbf{(1)}.$$

D'autre part, $g(\alpha)=\alpha \iff (\alpha+1)^2e^{-\alpha}=\alpha \iff e^{\alpha}=\dfrac{(\alpha+1)^2}{\alpha}$.

En remplaçant cette dernière valeur de e^{α} dans la relation **(1)** , on obtient :

$$\left(g^{-1}\right)'(\alpha)=\frac{e^{\alpha}}{1-\alpha^2}=\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha(1-\alpha)^2}=\frac{\alpha+1}{\alpha(1-\alpha)}.$$

Exercice 4 :

- ✓ **Contenu :** Produit vectoriel, équation d'un plan de l'espace, équation d'une sphère, intersection de plan et sphère, volume d'un tétraèdre.
- ✓ **Aptitudes visées :** appliquer le produit vectoriel pour décider de l'alignement de trois points, déterminer une équation cartésienne d'un plan et celle d'une sphère, étudier la position relative d'un plan et une sphère, calculer le volume d'un tétraèdre.

✓ **Corrigé :**

1°) a°) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ d'où $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ alors A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan $(\mathscr{P})$.

1°) b°) Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan $(ABC)=(\mathscr{P})$, d'où :

$(\mathscr{P}): x+y+z+d=0 \quad , d\in\mathbb{R}$.

L'écriture $A(1,0,0)\in(\mathscr{P}) \Leftrightarrow 1+d=0 \Leftrightarrow d=-1$ permet alors de conclure :

$(\mathscr{P}): x+y+z-1=0$.

$\boxed{\text{Note}}$: Méthode alternative 2 acceptable : Vérifications $A\in(\mathscr{P})$, $B\in(\mathscr{P})$ et $C\in(\mathscr{P})$.

$\boxed{\text{Note}}$: Méthode alternative 3 acceptable : Coplanarité de $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$: $\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=0 \Leftrightarrow \ldots$.

2°) a°) On a la réduction :

$$(\mathscr{S}): x^2+y^2+z^2-2x-2z+1=0 \Leftrightarrow (\mathscr{S}):(x-1)^2-1+y^2+(z-1)^2-1+1=0$$
$$\Leftrightarrow (\mathscr{S}):(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$$

On en déduit que l'ensemble $(\mathscr{S})$ est une sphère de centre $I(1,0,1)$ et de rayon $R=1$.

$\boxed{\text{Note}}$: Méthode alternative acceptable : Formule $h=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}-d$ ... .

2°) b°) Il suffit de montrer que les trois points A , B et C appartiennent à la sphère $(\mathscr{S})$.

On a $(1-1)^2+0^2+(0-1)^2=1$, d'où $A\in(\mathscr{S})$.

On a $(0-1)^2+0^2+(1-1)^2=1$, d'où $B\in(\mathscr{S})$.

On a $(1-1)^2+(-1)^2+(1-1)^2=1$, d'où $C\in(\mathscr{S})$.

$\boxed{\text{Note}}$: Méthode alternative acceptable :

Calcul de distances … puis le reste … : $d=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $r=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $d<r$, $H\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$, $AH=BH=CH$, …. .

3°) a°) Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ étant précédemment déterminé, on utilise la formule :

$$\mathscr{V}(IABC)=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AI}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right| .$$

Le calcul $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ainsi que le calcul du produit scalaire donne $\mathscr{V}(IABC)=\dfrac{1}{6}$ (uv)

3°) b°) Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}\alpha-1\\0\\2-\alpha\end{pmatrix}$ et

$$\mathscr{V}(MABC)=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|=\frac{1}{6}\left|(\alpha-1).1+0.1+(2-\alpha).1\right|=\frac{1}{6} \quad \text{indépendant de } \alpha$$

$\boxed{\text{Note}}$: La valeur de cette constante n'est pas exigée , en effet :

Méthode alternative 2 acceptable : parallélisme donc hauteur constante donc volume constant .

Exercice 5 :

- ✓ **Contenu :** Série statistique double, coefficient de corrélation, droite de régression.
- ✓ **Aptitudes visées :** Déterminer le coefficient de corrélation d'une série statistique double, déterminer une équation cartésienne de la droite de régression (de y et t),donner une estimation d'une valeur de y pour une valeur donnée de t.
- ✓ **Corrigé :**

1°) a°) Simple calcul, à l'aide d'une calculatrice :

t	0	1	2	3	4	5	6
x	9	11,2	14,8	18	22,8	28,8	36,2
$y=\ln x$	2,20	2,42	2,69	2,89	3,13	3,36	3,59

$\boxed{\text{Note}}$: Les calculs sont effectués à la calculatrice et les arrondis à l'ordre 10^{-2} sont exigés : Note 0 en cas de non respect de la consigne .

1°) b°)

$\boxed{\textbf{Note}}$ **:** L'énoncé parle de la série (y,t) !? Ceci est en contradiction avec la notation (t,y) adoptée par le manuel/programme officiel :
Il y'a risque de saisie erronée des données .

La saisie des données (t,y) dans la calculatrice, puis la consultation de la touche $\boxed{r}$ renvoie la valeur $r \simeq 0,9948$

L'énoncé , ne précisant pas l'ordre de l'arrondi concernant cette question , deux options se présentent

- Option 1 : L'arrondi , à l'ordre 10^{-3}. (Celui qui semble le plus adapté) conduit à $r \simeq 0,995$
- Option 2 : L'arrondi , à l'ordre 10^{-2}. (Celui qui s'aligne à la question précédente) conduit à $r \simeq 1$.

Les deux valeurs $r \simeq 0,995$ ou $r \simeq 1$ sont acceptées.

2°) a°) En respectant la consigne de l'énoncé indiquant l'obligation d'arrondir les résultats à l'ordre 10^{-2}, on obtient : $a \simeq 0,23$ et $b \simeq 2,20$.

L'équation de la droite de régression $(\mathscr{D})$ est alors : $(\mathscr{D}): y = 0,23\,t + 2,20$

2°) b°) On a : $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^{y} \Leftrightarrow x = e^{0,23t+2,20}$

L'expression de x en fonction de t est : $x = e^{0,23t+2,20}$

2°) c°) Pour $t = 10$, on a : $x = e^{0,23\times 10+2,20} = e^{4,50} \simeq 90,017131$ (Valeur fournie par la calculatrice)

En écrivant $90,017131 = 9,0017131 \times 10^{1}$ et en arrondissant la mantisse à l'unité, on obtient :
une estimation de x est $x \approx 90$, mais en tenant compte de l'unité de x, la réponse finale est :
Pour $t = 10$, une estimation de x est $x \approx 90\ 000$