REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2011

SESSION PRINCIPALE

SECTION : SCIENCES TECHNIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE : 3 heures** **COEFFICIENT : 3**

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l 'absence de réponse vaut 0 point.

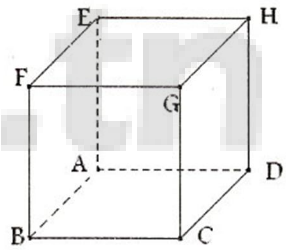
1) La fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x$ est

a) croissante sur $]0, +\infty[$ b) décroissante sur $]0, +\infty[$ c) n'est pas monotone sur $]0, +\infty[$.

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x - x + 1}{x - 1}$ est égale à :

a) 0 b) 2 c) 1

3) La figure ci-contre est celle d'un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.



i) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$ est égal à :

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) 1 c) $\sqrt{2}$

ii) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est égal à :

a) $\overrightarrow{AE}$ b) $\overrightarrow{EA}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AE}$

Exercice 2 (6 points)

1) Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1+u_n}; \ \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 3$.

2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de la suite (u_n).

3) On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{3}{u_n}$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1 - v_n$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n + 1 + \dfrac{8}{3}\left(1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.

c) Calculer la limite de $\dfrac{S_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 (5 points)

1) Montrer que $i e^{i\frac{\pi}{6}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$.

2) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$(E): \quad z^2 - 2(e^{i\frac{\pi}{12}})z + (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 0.$$

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{12}}$.

a) Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un losange.

b) Placer les points les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

c) Calculer l'aire du losange $OACB$.

Exercice 4 (6 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1+x)e^{-x}$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = -x\, e^{-x}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Calculer $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathcal{A}_n$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, les axes du repère et la droite D d'équation x= n

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\mathcal{A}_n$ en fonction de n.

b) Calculer $\lim_{n \to \infty} \mathcal{A}_n$.