

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTRE DE L'EDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2012		
	Epreuve : MATHEMATIQUES	Durée : 3h	Coefficient : 3
SECTION : Sciences Techniques			SESSION PRINCIPALE

Le sujet comporte 4 pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) La forme algébrique du nombre complexe $\sqrt{3} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ est

a) $\frac{3 - i\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$

2) Un argument du nombre complexe $(1 - i\sqrt{3})i$ est

a) $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{\pi}{2}$

c) $-\frac{\pi}{3}$

3) Le module du nombre complexe $1 + e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est égal à

a) 1

b) $\sqrt{2}$

c) 2

4) L'ensemble des points M d'affixe z tels que $(z - i)(\bar{z} + i) = 1$ est

a) un singleton.

b) une droite.

c) un cercle.

Exercice 2 (6points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points $A(2, 1, 1)$; $B(1, 1, 0)$ et $C(1, 0, 1)$.

1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan que l'on notera P.

b) Vérifier que $x - y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan P.

2) Soit le point D $(2, 0, 0)$.

a) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

b) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre ABCD.

3) Soit $I \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$. On désigne par (S) la sphère de centre I et passant par D.

- Montrer que la sphère (S) passe par les points A et B.
- En déduire que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle ($\mathcal{C}$).
- Justifier que ($\mathcal{C}$) est circonscrit au triangle ABC.

4) Soit Δ la droite passant par I et perpendiculaire au plan P.

- Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ .
- Déterminer les coordonnées du point Ω centre du cercle ($\mathcal{C}$).
- Soit D' le symétrique de D par rapport à Ω .

Montrer que le volume $\mathcal{V}'$ du tétraèdre D'ABC est égal à $\mathcal{V}$.

Exercice 3 (5 points)

Le tableau de variation suivant est celui de la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = 2 - x + \ln x.$$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	0	-	
f	1		$-\infty$

- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]1, +\infty[$ une unique solution notée α et que $\ln \alpha = \alpha - 2$.
 - En déduire le signe de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

2) Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2 + \ln u_n ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- Montrer que pour tout entier naturel n ; $1 \leq u_n \leq \alpha$.
- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4 (6 points)

Dans l'annexe ci-jointe, on a représenté dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C) d'une fonction f définie, continue, dérivable et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

On sait que la courbe (C) :

- admet l'axe des abscisses comme asymptote au voisinage de $+\infty$,
- atteint son maximum au point d'abscisse 0.

1) Par lecture graphique :

a) Déterminer $f(0)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $f'_d(0)$ (nombre dérivé à droite de f en 0)

b) Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Tracer dans l'annexe la courbe (C') de la fonction f^{-1} réciproque de f .

On note β l'abscisse du point d'intersection des deux courbes (C) et (C') .

3) On sait que la fonction f est définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = (ax + b)e^{-2x}$ où a et b sont deux réels.

a) En utilisant 1) a) montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = (2x + 1)e^{-2x}$

b) Soit $I = \int_0^\beta (2x + 1)e^{-2x} dx$.

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = 1 - (\beta + 1)e^{-2\beta}$.

c) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie (E) du plan limitée par la courbe (C') , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \beta$ et $x = 1$.

Hachurer (E) et déterminer $\mathcal{A}$ en fonction de β .

Epreuve : Mathématiques - Section : Sciences Techniques

Annexe (à rendre avec la feuille de copie)

