

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

**Exercice 1 (3 points)**

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse correcte vaut 0.75, une réponse fautive ou l'absence d'une réponse vaut 0 point.

1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2^n}{3+2^n}$  est égale à :

a)  $\frac{1}{3}$

b) 1

c)  $+\infty$

2) Soit la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = \left(\frac{e-1}{e}\right)^n$

a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

3) X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,2.

L'arrondi au centième de  $p(X > 10)$  est égal à :

a) 0,77

b) 0,86

c) 0,14

4) Y est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres  $n = 8$  et  $p = \frac{1}{3}$ .

L'écart type  $\sigma(Y)$  est égal à :

a)  $\frac{4}{3}$

b)  $\frac{16}{9}$

c)  $\frac{8}{3}$

**Exercice 2 (5 points)**

1) Soit, dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, l'équation (E) :

$$2z^2 - (1+i(\sqrt{3}-2))z + \sqrt{3}-i = 0.$$

a- Vérifier que  $(-i)$  est une solution de l'équation (E).

b- Déduire l'autre solution.

c- Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de l'équation (E).

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on donne

les points A, B, E et F d'affixes respectives  $a = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$  ;  $b = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(-1+i)$  ; 1 et  $-i$ .

- a- Placer dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  les points, E, F et A.
  - b- Vérifier que  $b - a = i(a + i)$ .
  - c- En déduire que le triangle ABF est rectangle et isocèle en A.
- 3) Construire le point B dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

**Exercice 3 (6 points)**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(2,0,1)$ ,  $B(0,2,1)$  et  $C(1,2,0)$ .

- 1) a- Déterminer les composantes du vecteur  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ .
- b- Déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est :  $x + y + z - 3 = 0$ .

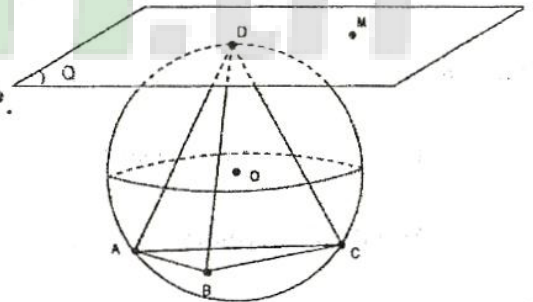
2) Soit la sphère S d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ .

- a- Vérifier que A, B et C sont des points de la sphère S.
- b- Déduire alors l'intersection de la sphère S avec le plan P.

3) Soit le point D de coordonnées  $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ .

On désigne par Q le plan passant par D et parallèle au plan P.

- a- Déterminer une équation cartésienne du plan Q.
- b- Montrer que Q est tangent à la sphère S au point D.



4) Soit  $M(x, y, z)$  un point de l'espace n'appartenant pas à P.

a- Calculer  $(\overline{AB} \wedge \overline{AC}) \cdot \overline{AM}$ .

b- Montrer que le volume V du tétraèdre MABC est égal à  $\frac{|x + y + z - 3|}{3}$ .

c- En déduire que pour tout point M du plan Q ;  $V = \frac{\sqrt{5}}{3} - 1$ .

#### Exercice 4 (6 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x(1 - \ln x)^2 + 1 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

et  $\zeta$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement les résultats.

2) a- En utilisant l'égalité :  $x \ln^2 x = (\sqrt{x} \ln x)^2$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  ; montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x = 0.$$

b- En déduire que  $f$  est continue à droite en 0.

c- Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

3) Dans la **figure** de l'annexe ci-jointe, on a tracé dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  :

- la courbe  $\Gamma$  de la fonction dérivée  $f'$  de  $f$ .
- la tangente  $\Delta$  à la courbe  $\zeta$  au point  $A(1, 2)$ .

On sait que la courbe  $\Gamma$  coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses  $\frac{1}{e}$  et  $e$  et qu'elle admet au point  $B(1, -1)$  une tangente horizontale.

Par une lecture graphique:

a- Déterminer le signe de  $f'$  sur  $]0, +\infty[$  et dresser le tableau de variation de  $f$ .

b- Montrer que  $A$  est un point d'inflexion de la courbe  $\zeta$ .

4) Tracer la courbe  $\zeta$  de  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  de l'annexe ci-jointe.

5) Soit  $0 < \lambda < \frac{1}{e}$ .

On désigne par  $\mathcal{A}_\lambda$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $\Gamma$  de la fonction dérivée  $f'$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = \lambda$  et  $x = \frac{1}{e}$ .

Montrer que  $\mathcal{A}_\lambda = 1 + \frac{4}{e} - f(\lambda)$  et en déduire  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathcal{A}_\lambda$ .

Epreuve de mathématiques – Section Sciences Techniques

Feuille à rendre avec la copie

