Examen du baccalauréat **Session principale**

Session de Juin 2014

Section : Sciences techniques

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

1)	2)	3)	4)
b	a	c	a

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2^n}{3+2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n(\frac{1}{2^n}+1)}{2^n(\frac{3}{2^n}+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{2^n}+1}{\frac{3}{2^n}+1} = 1$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{e-1}{e}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{e}\right)^n = 0$, car $0 < 1-\dfrac{1}{e} < 1$.

3) X suit une loi exponentielle de paramètre 0,2.

On a donc pour tout réel positif t, $p(X > t) = e^{-0,2t}$. D'où $p(X > 10) = e^{-0,2\times 10} = e^{-2} = 0,135...$

L'arrondi au centième de $p(X > 10)$ est égal à $0,14$.

4) Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = \dfrac{1}{3}$.

L'écart type $\sigma(Y) = \sqrt{8\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}} = \sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{4}{3}$.

Exercice 2

1) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : 2\,z^2 - (1+i(\sqrt{3}-2))\,z + \sqrt{3} - i = 0$.

a) Vérifions que (-i) est une solution de l'équation (E) :

$$2\,(-i)^2 - (1+i(\sqrt{3}-2))\,(-i) + \sqrt{3} - i = -2 + i - (\sqrt{3}-2) + \sqrt{3} - i = -2 + i - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} - i = 0.$$

D'où (-i) est une solution de l'équation (E).

b) Soit z_2 l'autre racine de l'équation (E).

- On peut utiliser la somme des racines :

$$-i + z_2 = \frac{1}{2}(1+i(\sqrt{3}-2)) \Rightarrow z_2 = i + \frac{1}{2}(1+i(\sqrt{3}-2))$$

$$\Rightarrow z_2 = \frac{1}{2}(1+2i+i(\sqrt{3}-2))$$

$$\Rightarrow z_2 = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- On peut utiliser le produit des racines :

$$(-i).z_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i) \Rightarrow z_2 = \frac{1}{(-i)}\,\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i) = \frac{1}{2}i(\sqrt{3}-i) = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

c) $z_1 = -i = \cos(\frac{-\pi}{2}) + i\sin(\frac{-\pi}{2}) = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

$z_2 = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}) = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2) Les points $A(a)$; $B(b)$; $E(1)$ et $F(-i)$ où $a = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(-1+i)$.

a) Voir figure.

$a = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \left[1, \frac{\pi}{3}\right]$. D'où la construction du point A.

b)
$$\begin{aligned} b-a &= \frac{1+\sqrt{3}}{2}(-1+i) - (\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ &= -\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -1-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = i(i+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = i(i+a) = i(a+i). \end{aligned}$$

Ainsi on a : $b-a = i(a+i)$.

c)
$$\begin{aligned} b-a = i(a+i) &\Rightarrow \frac{b-a}{a+i} = i \\ &\Rightarrow \arg\left(\frac{b-a}{a-(-i)}\right) \equiv \arg(i)[2\pi] \\ &\Rightarrow (\overrightarrow{FA},\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ &\Rightarrow (\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}) + \pi \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ &\Rightarrow (\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ &\Rightarrow (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{aligned}$$

D'où le triangle ABF est rectangle en A.

$$\begin{aligned} b-a = i(a+i) &\Rightarrow |b-a| = |i(a+i)| \\ &\Rightarrow |b-a| = |i||a+i| \\ &\Rightarrow |b-a| = |a-(-i)| \\ &\Rightarrow AB = AF \end{aligned}$$

D'où le triangle ABF est isocèle de sommet principal A.

Ainsi le triangle ABF est rectangle et isocèle en A.

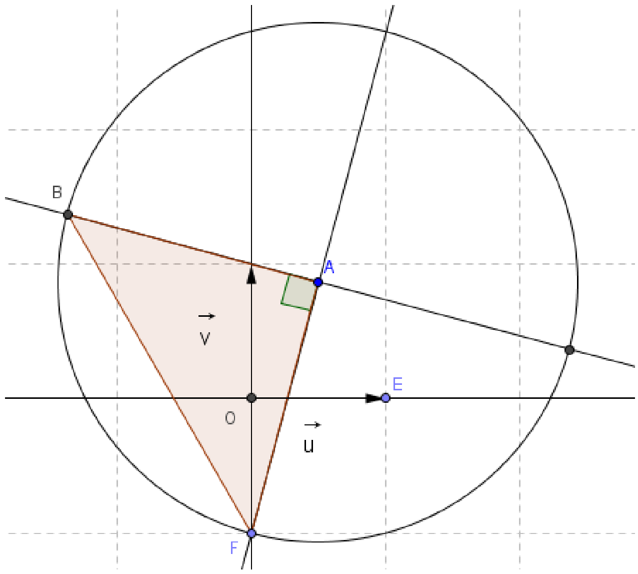
3) Le triangle ABF est rectangle et isocèle en A.

On a $AB = AF$, d'où le point B appartient au cercle (C) de centre A et passant par F.

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, d'où B appartient à la droite Δ perpendiculaire à (AF) en A.

Ainsi B appartient à l'intersection de Δ et (C).

Cette intersection contient deux points, mais un seul point vérifie $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.



Exercice 3

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les points $A(2,0,1)$, $B(0,2,1)$ et $C(1,2,0)$.

1)a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, d'où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par conséquent les points A, B et C ne sont pas alignés. D'où ils déterminent un plan P dont un vecteur normal est $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

Ainsi une équation de P est de la forme $-2x - 2y - 2z + c = 0$.

$A(2, 0, 1) \in P \Rightarrow -2\times 2 - 2\times 0 - 2\times 1 + c = 0$

$\Rightarrow c = 6.$

$P: -2x - 2y - 2z + 6 = 0$

$P: x + y + z - 3 = 0.$

Autrement : il suffit de vérifier que chacun des points A, B et C vérifie l'équation du plan $P: x + y + z - 3 = 0$ et puisque les points ne sont pas alignés donc P est le plan qu'ils déterminent.

2) Soit S la sphère d'équation : $S: x^2+y^2+z^2=5$.

a) $2^2+0^2+1^2=5 \Rightarrow A(2,0,1)\in S$; $0^2+2^2+1^2=5 \Rightarrow B(0,2,1)\in S$.
$1^2+2^2+0^2=5 \Rightarrow C(1,2,0)\in S$.

b) Le plan P est déterminé par les points A, B et C. La sphère S passe par ces trois points. D'où l'intersection de la sphère S avec le plan P est le cercle circonscrit au triangle ABC.

3) $D\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$. Q le plan passant D et parallèle au plan P.

a) Le plan Q est parallèle au plan P, d'où une équation cartésienne du plan Q est de la forme $x+y+z+c=0$.

$D\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\in Q \Rightarrow 3\sqrt{\frac{5}{3}}+c=0 \Rightarrow c=-3\sqrt{\frac{5}{3}}$. Ainsi $Q: x+y+z-3\sqrt{\frac{5}{3}}=0$.

b) On a O est le centre de la sphère S. Calculons la distance de O au plan Q :

$d(O,Q)=\dfrac{\left|3\sqrt{\frac{5}{3}}\right|}{\sqrt{3}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{5}{3}}=\sqrt{5}=$ le rayon de la sphère. D'où le plan Q est tangent à la sphère S.

$\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2=\frac{5}{3}+\frac{5}{3}+\frac{5}{3}=5$. D'où le point D appartient à la sphère S.

Par conséquent le plan Q est tangent à la sphère S au point D.

4) Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace n'appartenant pas au plan P.

a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y\\z-1\end{pmatrix}$

$(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}=-2(x-2)-2y-2(z-1)=-2x-2y-2z+6$.

b) Le volume V du tétraèdre MABC :

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}\right|=\frac{1}{6}\left|-2x-2y-2z+6\right|=\frac{|x+y+z-3|}{3}.$$

c) Soit $M(x,y,z)$ un point du plan Q. On a $x+y+z-3\sqrt{\frac{5}{3}}=0$.

$x+y+z-3\sqrt{\frac{5}{3}}=0 \Rightarrow x+y+z=3\sqrt{\frac{5}{3}}$

$$\Rightarrow V=\frac{|x+y+z-3|}{3}=\frac{\left|3\sqrt{\frac{5}{3}}-3\right|}{3}=\left|\sqrt{\frac{5}{3}}-1\right|=\sqrt{\frac{5}{3}}-1.$$

Exercice 4

f la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par $\begin{cases} f(x) = x\,(1-\ln x)^2+1 \;;\; \text{si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

(C) la courbe représentative f de dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\ln x)^2+1 = +\infty$; car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(1-\ln x)^2+1}{x} = \lim_{x\to+\infty}(1-\ln x)^2+\frac{1}{x} = +\infty.$$

D'où la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe $(O,\vec{j})$.

2)a) $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln^2 x = \lim\limits_{x\to0^+}(\sqrt{x}\ln x)^2 = \lim\limits_{x\to0^+}(\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})^2)^2$

$$= \lim_{x\to0^+}(2\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2 = 0 \;;\; \text{car } \lim_{t\to0^+} t\ln t = 0$$

b) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x(1-\ln x)^2+1$

$$= \lim_{x\to0^+} x(1-2\ln x+\ln^2 x)+1$$

$$= \lim_{x\to0^+} x-2x\ln x+x\ln^2 x+1$$

$$= 1 \;;\; \text{car } \lim_{x\to0^+} x\ln x = 0 \text{ et } \lim_{x\to0^+} x\ln^2 x = 0.$$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1 = f(0)$, d'où f est continue à droite en 0.

c) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}(1-\ln x)^2 = +\infty$; car $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x = -\infty$

D'où f n'est pas dérivable à droite en 0.

La courbe (C) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale dirigée vers les y positifs.

3) Γ est la courbe de la fonction dérivée f' de f.

a) Le signe de f' est donné par la position de la courbe Γ par rapport à l'axe des abscisses. On a :

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le tableau de variation de f :

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	$f(\frac{1}{e})$	↘	1	↗	$+\infty$

$f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}(1-\ln(\frac{1}{e}))^2 + 1 = \frac{4}{e} + 1$

b) On remarque que la courbe Γ de f' admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1. Donc f'' s'annule en 1.

D'après la courbe Γ la fonction f' est décroissante dans $]0,1[$ et croissante dans $[1,+\infty[$, donc f'' change de signe de part et d'autre de 1.

f'' s'annule en 1 en changeant de signe, d'où le point d'abscisse 1, c'est-à-dire A, est un point d'inflexion pour la courbe (C) de f.

4) Voir figure.

5) Soit $0 < \lambda < 1$.

A_λ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Γ de la fonction dérivée f', l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = \frac{1}{e}$.

$$A_\lambda = \int_\lambda^{\frac{1}{e}} f'(x)\,dx = [f(x)]_\lambda^{\frac{1}{e}} = f(\frac{1}{e}) - f(\lambda) = \frac{4}{e} + 1 - f(\lambda).$$

$$\lim_{\lambda\to 0^+} A_\lambda = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{4}{e} + 1 - f(\lambda) = \frac{4}{e} + 1 - 1 = \frac{4}{e}\ ;\ \text{car } \lim_{\lambda\to 0^+} f(\lambda) = 1.$$