

Corrigé**Exercice 1**

1. (A₁) **Vrai**: en effet si $33n \equiv 0 \pmod{2013}$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $33n = 2013k = 61 \times 33k$ alors $n = 61k$ ou encore $n \equiv 0 \pmod{61}$.

(A₂) **Vrai**: en effet $33 \wedge 11 = 11$ et 11 divise 2013. Ainsi l'équation admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2. (A₃) **Vrai**: en effet :
$$\begin{cases} u: x \mapsto \ln x \text{ est définie et dérivable sur }]0, +\infty[\\ x \mapsto \frac{e^x}{1+x^2} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ donc elle est continue sur } u(]0, +\infty[) \\ 1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$
 donc la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

(A₃) **Faux**: car pour tout $x \in]0, +\infty[$, $F'(x) = \frac{e^{\ln x}}{1+(\ln x)^2} \times \frac{1}{x} = \frac{x}{1+(\ln x)^2} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{1+(\ln x)^2}$.

Exercice 2

A. 1) Une mesure de l'angle de f est $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$. Le rapport de f est $\frac{OA}{OB} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 2$.

2) a) Le triangle OAB est rectangle en B et de sens direct donc son image par f est un triangle rectangle en f(B) et de sens direct. Or f(O) = O, f(B) = A et f(A) = C, il en résulte que le triangle OCA est

rectangle en A de sens direct et $\frac{AC}{AB} = 2$ donc $AC = 2AB$.

b) Voir figure.

B. 1) a) On sait que g(A) = C et g(B) = A donc le rapport de g est $\frac{AC}{AB} = 2$ donc $g \circ g = h_{(\Omega, 4)}$ or $g \circ g(B) = C$, il en résulte que $h_{(\Omega, 4)}(B) = C \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega B}$.

b) Puisque $\overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega B}$ donc Ω est le barycentre des points pondérés (C, 1) et (B, -4) d'où $\overrightarrow{C\Omega} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$.

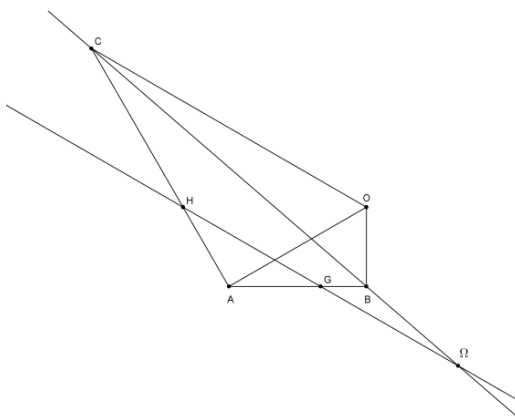
2) a) G est le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 2) d'où $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{1+2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et puisque g(G) =

H, g(A) = C et g(B) = A, on en déduit que $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) D'après a) $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{B\Omega} + \overrightarrow{\Omega C}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{B\Omega} + 4\overrightarrow{\Omega B}) = \overrightarrow{\Omega B}$.

On a $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{\Omega B}$ donc $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{\Omega B}$ donc $-\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{\Omega B}$ donc $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{\Omega G}$, il en résulte que G est le milieu de $[\Omega H]$.

c) G est le milieu de $[\Omega H]$ donc $\overrightarrow{\Omega H} = 2\overrightarrow{\Omega G}$ et g est une similitude indirecte de centre Ω , de rapport 2 et g(G) = H d'où l'axe de g est (GH).



Exercice 3

1. a) $\vec{IJ} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{IK} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\vec{IJ} \wedge \vec{IK} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Le vecteur $\vec{IJ} \wedge \vec{IK} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc les points I, J et K ne sont pas alignés donc ils déterminent un plan

P. $\vec{IJ} \wedge \vec{IK} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à P donc $P: x - y + z + d = 0$ et $I \in P$ donc $d = 0$, on en déduit que

$$P: x - y + z = 0.$$

2. $v = \frac{1}{6} |(\vec{IJ} \wedge \vec{IK}) \cdot \vec{IS}|$, $\vec{IS} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $(\vec{IJ} \wedge \vec{IK}) \cdot \vec{IS} = 3$ Il en résulte que $v = \frac{1}{2}$.

3. a) $\vec{MJ} \wedge \vec{MK} = (\vec{MI} + \vec{IJ}) \wedge (\vec{MI} + \vec{IK}) = \vec{MI} \wedge \vec{MI} + \vec{IJ} \wedge \vec{IK} + \vec{MI} \wedge (\vec{IK} - \vec{IJ}) = \vec{IJ} \wedge \vec{IK} + \vec{MI} \wedge \vec{JK} = \vec{IJ} \wedge \vec{IK}$.

b) $(\vec{MJ} \wedge \vec{MK}) \cdot \vec{MS} = (\vec{MJ} \wedge \vec{MK}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IS}) = (\vec{MJ} \wedge \vec{MK}) \cdot \vec{MI} + (\vec{MJ} \wedge \vec{MK}) \cdot \vec{IS} = (\vec{MJ} \wedge \vec{MK}) \cdot \vec{IS}$
 $= (\vec{IJ} \wedge \vec{IK}) \cdot \vec{IS}$. On en déduit que SMJK et SIJK ont le même volume d'où le volume de SMJK est $\frac{1}{2}$.

4. a) $h(P) = P'$ donc P et P' sont parallèles donc $P': x - y + z + d = 0$. Soit $I'(x, y, z) = h(I)$ donc $\vec{SI'} = 2\vec{SI}$ donc $\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ on en déduit que $I'(1, 3, -1)$, or $I' \in P'$ donc $d = 3$. Ainsi $P': x - y + z + 3 = 0$.

b) On sait que $M \in (SM) \cap P$ donc $h(M) \in h((SM)) \cap h(P)$ donc $h(M) \in (SM) \cap P' = \{M'\}$, d'où $h(M) = M'$ on montre de même que $h(J) = J'$ et $h(K) = K'$ et puisque $h(S) = S$, il en résulte que

$$h(SMJK) = SM'J'K' \text{ donc le volume de } SM'J'K' \text{ est } 2^3 \times \frac{1}{2} = 4.$$

$$\text{Le volume du solide } MJKM'J'K' = V_{SM'J'K'} - V_{SMJK} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Exercice 4

1. a) $\text{Aff}(\vec{EM}) = 1 + e^{i\theta} - 1 = e^{i\theta}$ et $\text{Aff}(\vec{FN}) = i + ie^{i\theta} - i = ie^{i\theta}$.

b) $EM = |e^{i\theta}| = 1$ donc M varie sur C_1 et $FN = |ie^{i\theta}| = 1$ donc N varie sur C_2 .

c) $\frac{\text{Aff}(\vec{FN})}{\text{Aff}(\vec{EM})} = \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} = i$ imaginaire donc $\vec{FN} \perp \vec{EM}$ d'où les droites (FN) et (EM) sont perpendiculaires.

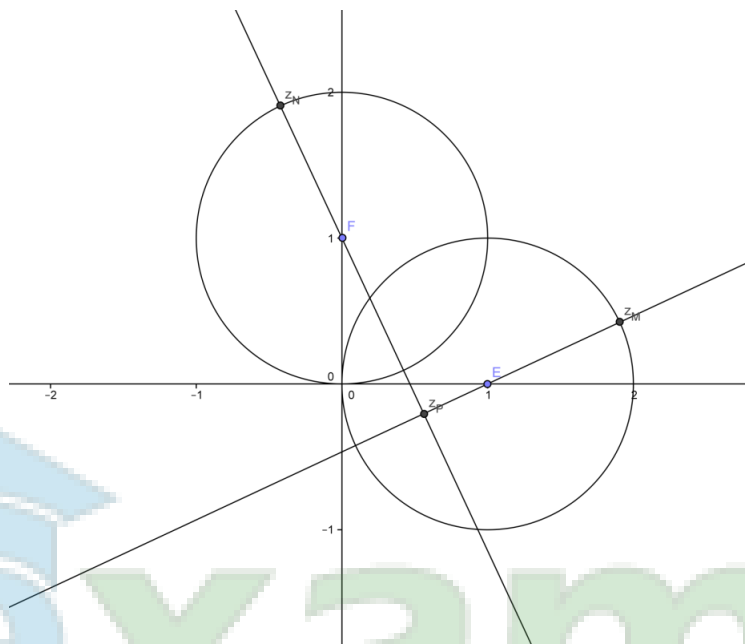
2. a) $\frac{\text{Aff}(\vec{EP})}{\text{Aff}(\vec{EM})} = \frac{(1-i)\sin\theta e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta}} = (1-i)\sin\theta - e^{-i\theta} = \sin\theta - i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta = \sin\theta - \cos\theta$.

$$\frac{\text{Aff}(\overrightarrow{FP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{FN})} = \frac{(1-i)\sin\theta e^{i\theta} - i}{i + ie^{i\theta} - i} = (-1-i)\sin\theta - e^{-i\theta} = -\sin\theta - i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta = -\sin\theta - \cos\theta.$$

b) $\frac{\text{Aff}(\overrightarrow{EP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{EM})} = \sin\theta - \cos\theta$ est réel donc (EP) et (EM) sont parallèles donc E, P et M sont alignés

$$\frac{\text{Aff}(\overrightarrow{FP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{FN})} = -\sin\theta - \cos\theta \text{ est réel donc (FP) et (FN) sont parallèles donc F, P et N sont alignés}$$

Ainsi P est le point d'intersection de (FN) et (EM).



Exercice 5

I. 1.a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0$. Les droites $y = 0$ et $y = 1$ sont

des asymptotes de C_φ respectivement en $-\infty$ et $+\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x - 1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty$. La droite $x = 0$ est une asymptote de C_φ

c) Pour tout réel x non nul, $\varphi'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^{2x}}{(e^x - 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$

2. Pour tout réel x non nul, $\varphi(x) = x \Leftrightarrow \varphi(x) - x = 0$, on pose $h(x) = \varphi(x) - x$

La fonction h est dérivable sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$ et $h'(x) = \varphi'(x) - 1 < 0$ pour tout réel x non nul.

La fonction h est continue et strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$ (resp $] 0, +\infty[$) donc elle réalise une bijection de

$] -\infty, 0[$ (resp $] 0, +\infty[$) sur $h(] -\infty, 0[) = \mathbb{R}$ (resp $h(] 0, +\infty[) = \mathbb{R}$), $0 \in \mathbb{R}$ donc il existe un unique réel $\alpha \in] -\infty, 0[$

(resp $\beta \in] 0, +\infty[$) tel que $h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\alpha) = \alpha$ (resp $h(\beta) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\beta) = \beta$). On en déduit que l'équation

$\varphi(x) = x$ admet exactement deux solutions $\alpha \in]-\infty, 0[$ et $\beta \in]0, +\infty[$

II. 1) a) $\Delta_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$ donc $\Delta_a : y = (e^a - 1)(x-a) + e^a - a$ d'où $\Delta_a : y = (e^a - 1)x + (1-a)e^a$.

$D_b : y = g'(b)(x-b) + g(b)$ donc $D_b : y = \left(-1 + \frac{1}{b}\right)(x-b) + 1 - b + \ln b$ d'où $D_b : y = \left(-1 + \frac{1}{b}\right)x + \ln b$.

b) (Δ_a et D_b sont parallèles) si et seulement si ($f'(a) = g'(b)$) si et seulement si $\left(-1 + \frac{1}{b} = e^a - 1\right)$

si et seulement si $\left(\frac{1}{b} = e^a\right)$ si et seulement si $(b = e^{-a})$.

2) a) Δ_a et D_b étant parallèles donc

(Δ_a et D_b sont confondues) si et seulement si $\begin{cases} (1-a)e^a = \ln b \\ b = e^{-a} \end{cases}$ si et seulement si $((1-a)e^a = -a)$ si et

seulement si

$(a(e^a - 1) = e^a)$ si et seulement si $(a \neq 0 \text{ et } a = \frac{e^a}{e^a - 1})$.

b) d'après 2) a) Δ_a et D_b sont confondues alors $\varphi(a) = a$ or $\varphi(\alpha) = \alpha$ ($\alpha \neq 0$) donc Δ_α est une tangente commune à C_f et C_g en $A(\alpha, f(\alpha))$ et en $B(b, g(b))$ or $b = e^{-\alpha}$ d'après (II ; 1) a) donc $B(e^{-\alpha}, g(e^{-\alpha}))$.

c) On a aussi $\varphi(\beta) = \beta$ signifie $\beta = \frac{e^\beta}{e^\beta - 1}$, Δ_β est une tangente commune à C_f et à C_g respectivement en $A'(\beta, f(\beta))$ et $B'(e^{-\beta}, g(e^{-\beta}))$.

3) a) Voir figure.

b) $f(-\alpha) - \alpha = e^{-\alpha} - (-\alpha) - \alpha = e^{-\alpha}$

c) Voir figure.

