Examen du baccalauréat (Juin 2008)	Epreuve : MATHEMATIQUE
Section : Economie et Gestion	Session principale

Exercice 1

I- 1) b) 2) c)

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

II- 1) a) 2) b)

$$p(A\cap B) = p(A)\times p_A(B)$$
$$p(B) = p(A)\times p_A(B) + p(\overline{A})\times p_{\overline{A}}(B)$$

Exercice 2

1) a) Pour tout $n\in IN, v_{n+1} = u_{n+1} - e$

$$= \frac{1}{e}u_n + e - 1 - e \quad = \frac{1}{e}(u_n - e)$$

$$= \frac{1}{e}v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$

b) (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de 1[er] terme

$v_0 = u_0 - e = -e.$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, , $v_n = v_0\left(\frac{1}{e}\right)^n$ donc

$$v_n = -e\left(\frac{1}{e}\right)^n = -\frac{1}{e^{n-1}}$$

Soit u une suite géométrique de raison q. Si q appartient à $]-1,1[$, alors u converge vers 0.

c) (v_n) est une suite géométrique

de raison $\frac{1}{e}$ et $\frac{1}{e} \in]-1,1[$ par suite (v_n) converge vers 0.

3) Pour tout $n\in IN, u_n = v_n + e.$

La suite (v_n) converge vers 0, donc

$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers e.}}$

Exercice 3 :

1)a) Il y a 3 chemins de sommet B, donc $\boxed{\text{le sommet B est de degré 3}}$.

b) Le sommet B est de degré impair, donc le graphe G n'admet pas de cycle eulérien.

Un graphe connexe G admet un cycle eulérien si et seulement si, chacun de ses sommets est de degré pair.

2)a) Le graphe G est connexe et admet seulement deux sommets de degrés impairs (les sommets B et E), alors G admet au moins une chaine eulérienne.

Un graphe connexe G admet une chaîne eulérienne si et seulement si, le nombre de ses sommets de degré impair est 0 ou 2.

b) B-C-D-B-E-A-D-E et E-A-D-E-B-C-D-B sont des chaines eulériennes

3) La matrice associée au graphe G est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4 :

1) D'après le tableau de variation, g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et s'annule pour x=1. Donc on a

si $0 < x < 1$ alors $g(x) < g(1)$ et par suite $g(x) < 0$

si $x > 1$ alors $g(x) > g(1)$ et par suite $g(x) > 0$

x	0	1	$+\infty$
g(x)	-	0	+

2) f est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}$

a) On a $\lim\limits_{x\to 0^+} (x-1) = -1$

et $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} \times \ln x = -\infty$

donc $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$.

Par suite la droite d'équation x = 0 est une asymptote à (C).

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - (x-1)) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(-\dfrac{\ln x}{x} \right) = 0.$

Donc la droite D d'équation y= x-1 est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

3) a) Soit x > 0, $f'(x) = 1 - \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2}$

$$= 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$$

Donc $\quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, $x^2 > 0$ donc f'(x) et g(x) sont de même signe.

Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - 1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

4)a) Position relative de la courbe (C) et la droite D

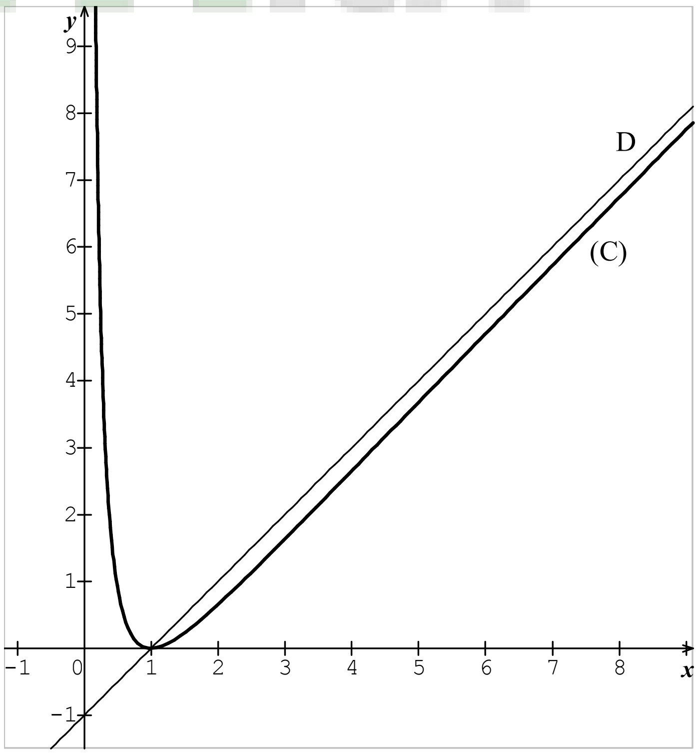
Il suffit d'étudier le signe de f(x) – (x- 1).

Pour tout x > 0 ,

$$f(x) - (x - 1) = \left(-\frac{\ln x}{x}\right).$$

x	0	1	$+\infty$
$-\dfrac{\ln x}{x}$	+	0	-
Position de (C) par rapport à D.	(C) est au dessus de D		(C) est en dessous de D.

A(1,0)



c) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la droite D , la courbe (C) et les droites d'équations respectives x = 1 et x = e.

(l'unité de longueur est 1cm, l'unité d'aire est 1 cm^2.)

$$A = \int_1^e \left| f(x) - (x-1) \right| dx$$

$$= \int_1^e \left| \frac{\ln x}{x} \right| dx \quad = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} \ (cm^2)$$

$(u^2)'=2u'u$.

$\frac{\ln x}{x}$ *est de la forme u'u*